

Capítulo 2

Resistência --- dos materiais ---

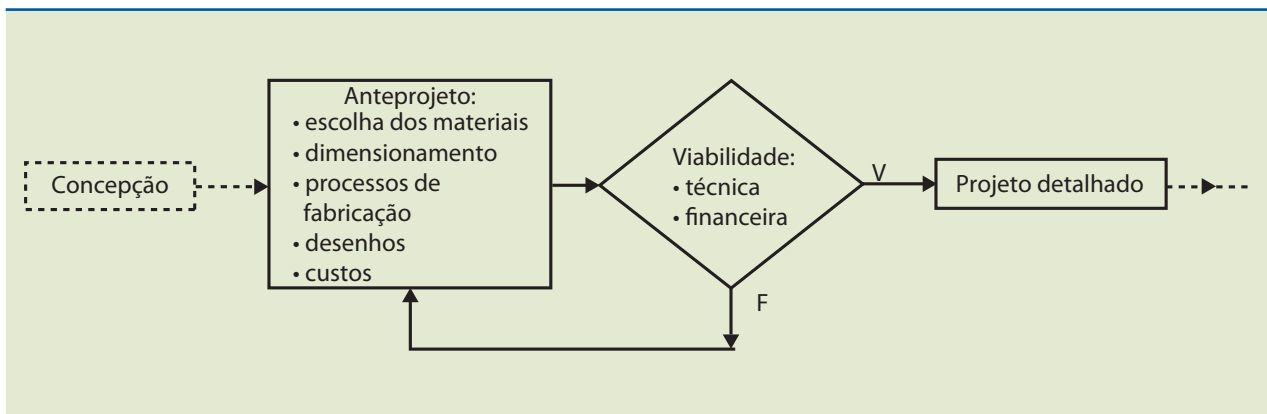
A “Resistência dos materiais”, na mecânica, estuda esforços internos que atuam em estruturas, componentes de máquinas, dispositivos mecânicos e outros, e determina sua geometria para que resistam aos carregamentos (solicitações) de forma segura.

Anteprojeto é a fase inicial de um projeto.

Figura 2.1
Diagrama de blocos geral para anteprojeto.

O objetivo deste capítulo é prover o técnico de nível médio de conhecimentos em resistência dos materiais, de modo que sejam possíveis a seleção e o dimensionamento de estruturas, equipamentos e dispositivos.

A figura 2.1 mostra de forma esquemática um **anteprojeto** que, necessariamente, requer dimensionamento de dispositivos e seleção de materiais.



Em nosso estudo, denominamos estrutura o conjunto de elementos resistentes de uma construção qualquer.

2.1 Esforços internos nas estruturas

A figura 2.2 indica esquematicamente uma **estrutura** em equilíbrio sob ação de esforços externos. São considerados esforços ativos o peso próprio da estrutura e as cargas que nela atuam (P_1 , P_2 e P_3).

As reações nos pontos A e B, devidas às cargas (P_1 , P_2 e P_3), são denominadas **esforços reativos**.

As reações de apoio devidas às cargas aplicadas nos pontos C, D e E ocorrem porque a ação dessas cargas se transmite aos apoios A e B através do material constituinte das barras da estrutura. Por causa dessa transmissão, em todas as

partes internas da barra, há solicitação do material e este opõe certa resistência, que se manifesta sob forma de esforços resistentes, denominados tensões.

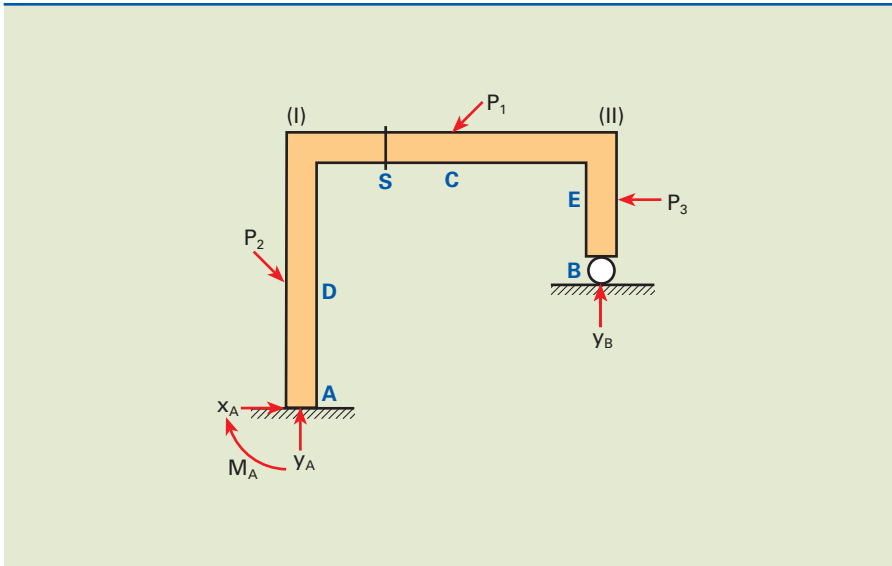


Figura 2.2

Desenho esquemático de uma estrutura.

2.1.1 Classificação dos esforços

Suponhamos que a estrutura em equilíbrio da figura 2.2 seja cortada por uma seção transversal S, de modo a separar essa estrutura em dois corpos livres, AS e SB, indicados como partes I e II respectivamente.

Para manter qualquer uma dessas partes em equilíbrio, e nas mesmas condições anteriores ao corte, é necessário aplicar, nos diversos pontos da seção transversal, os esforços que atuavam anteriormente ao corte.

Considerando o corpo livre AS, cuja seção transversal é indicada na figura 2.3, os esforços internos equivalentes aplicados ao centro de gravidade são representados por uma força resultante R e um momento M .

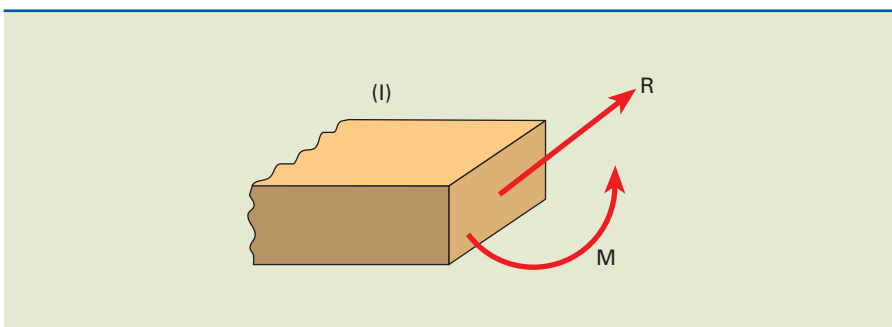


Figura 2.3

Representação da seção transversal do trecho AS.

A força R pode ser decomposta em duas componentes, uma **normal** (N), perpendicular à seção, e outra **cortante** (Q), paralela à seção. Essa decomposição pode ser observada na figura 2.4.

A força normal pode ser de tração ou compressão, dependendo do sentido da força.

A figura 2.4 ilustra esquematicamente a decomposição do momento no plano da seção, denominado **momento torçor** (M_t), e no plano perpendicular ao plano da seção, denominado **momento fletor** (M).

Figura 2.4
Indicação esquemática das forças e planos de ação dos momentos.

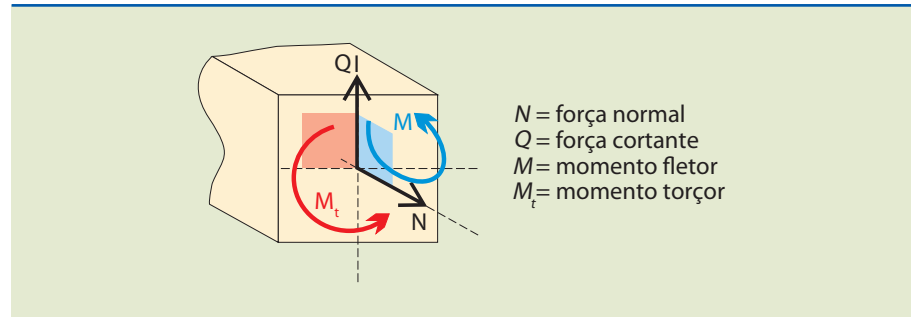
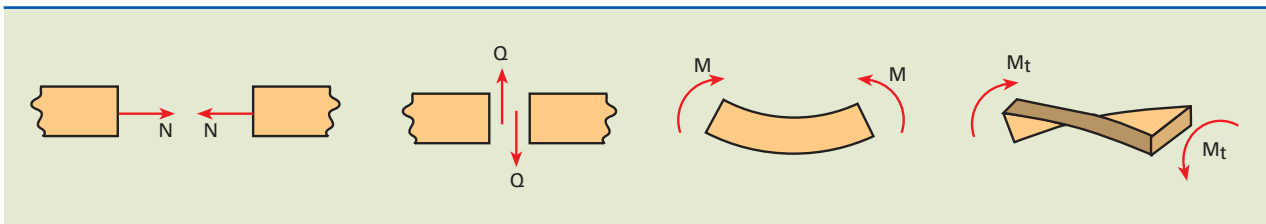
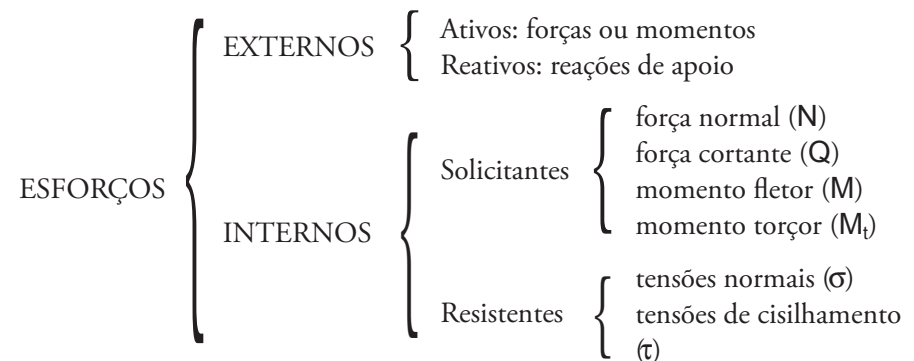


Figura 2.5
Ação dos esforços independentes na barra.

A figura 2.5 mostra esquemas dos diferentes tipos de esforços internos independentes que atuam em uma barra. N , Q , M e M_t denominam-se esforços internos solicitantes e são importantes no cálculo das tensões internas nas estruturas.



Em resumo, a classificação dos esforços pode ser feita da seguinte maneira:


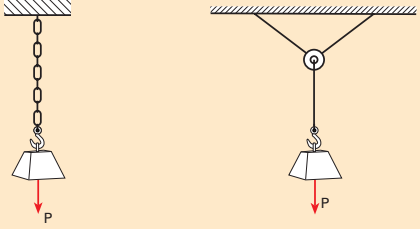
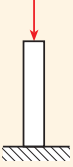

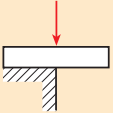
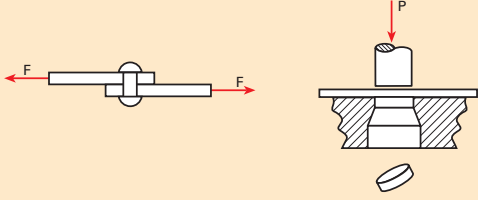
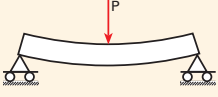
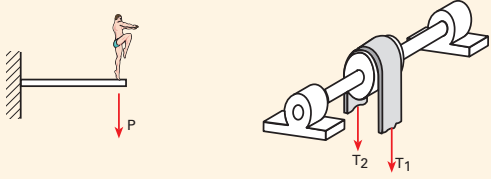

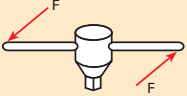


2.1.2 Exemplos de carregamentos

Para cada tipo de sollicitação idealizada (à esquerda na figura 2.6), podemos observar seu carregamento em uma estrutura real (à direita).

Figura 2.6

Exemplos de carregamentos.

| SOLICITAÇÃO | EXEMPLOS PRÁTICOS |
|--|---|
| Tração  |  |
| Compressão  |  |
| Cisalhamento  |  |
| Flexão  |  |
| Torção  |  |

2.2 Propriedades mecânicas dos materiais

Todos os projetos mecânicos envolvem diretamente a seleção de materiais, em que são levados em conta critérios técnicos e econômicos. Por esse motivo é indispensável seu conhecimento.

Nesta seção são introduzidos alguns conceitos fundamentais relativos às propriedades dos materiais, como a ductilidade, o módulo de elasticidade, regiões de um gráfico de tensão por deformação e outros.

2.2.1 Materiais dúcteis e frágeis

Os materiais metálicos utilizados em engenharia classificam-se em **dúcteis** e **frágeis**.

O comportamento dúctil ou frágil dependerá de diversas condições, como temperatura, pressão e microestrutura.

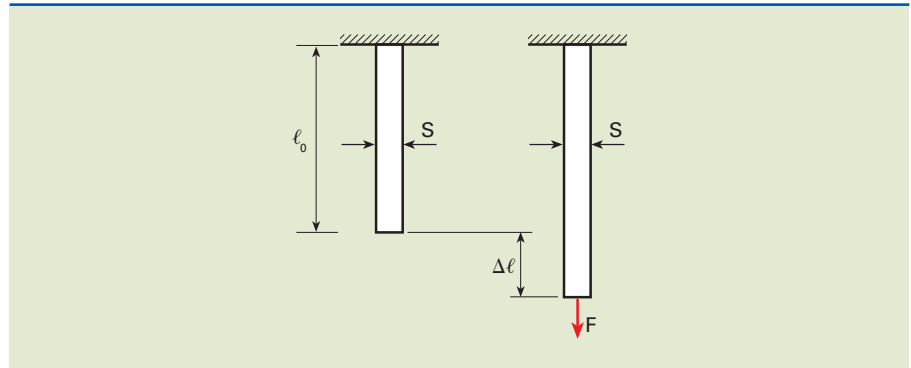
Um material é considerado dúctil quando apresenta grandes deformações antes de romper-se. Citamos como exemplo o alumínio e o cobre, que sob condições normais de temperatura e pressão têm comportamento dúctil.

Um material é considerado frágil quando apresenta pouca deformação antes de romper-se. Exemplos de comportamento frágil são o concreto e os materiais cerâmicos.

Todos os materiais são deformáveis sob a ação de esforços. Para nosso estudo, considera-se uma barra prismática sujeita à ação de uma força axial (longitudinal), de tração F , conforme indicado na figura 2.7.

O lado esquerdo da figura 2.7 mostra uma barra sem solicitação que possui comprimento inicial ℓ_0 e seção transversal S .

Figura 2.7
Barra prismática sob ação de uma carga F .



ε : épsilon, letra do alfabeto grego.

Aumentando gradativamente o valor da força axial F , a barra tende a se deslocar no mesmo sentido da força. A variação entre as dimensões inicial e final é denominada **alongamento** ou **deformação** ($\Delta \ell$).

Define-se **deformação unitária** ε como a relação entre o alongamento $\Delta \ell$ e o comprimento inicial ℓ_0 da barra.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \left(\frac{\text{m}}{\text{m}}; \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \right)$$

Portanto, ε é adimensional, comumente apresentado em porcentagem (%) e designado apenas como **deformação**.

Admitindo distribuição uniforme da força F na seção transversal, todo o elemento será solicitado por uma tensão normal σ , que define a relação entre a força normal atuante e a seção transversal.

σ : sigma, letra do alfabeto grego.

$$\text{Portanto, } \sigma = \frac{P}{S} \left(\frac{N}{\text{mm}^2}; \frac{N}{\text{m}^2}; \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \dots \right)$$

Em função de ensaios mecânicos específicos nos materiais, como o **ensaio de tração** (realizado em máquinas de tração), obtemos os gráficos de tensão por deformação para determinado material.

O ensaio de tração consiste em submeter um material de geometria padrão (normalmente denominado **corpo de prova**) a esforços de tração, de modo que o material alongue até a ruptura.

Os diagramas *a* e *b* da figura 2.8 mostram esquematicamente dois gráficos de tensão por deformação, respectivamente para materiais dúcteis (2.8a) e frágeis (2.8b).

Ao observar esses gráficos, nota-se que existe uma região denominada **zona elástica** ou **linear elástica**. Em 1678, Robert Hooke constatou que, nessa região, existia relação de forma linear entre tensão e deformação para o trecho OP, ou seja, a tensão é proporcional à deformação.

A região de escoamento ou zona de deformação plástica (3) é observada apenas para materiais dúcteis. Nessa região, o material não retorna a sua forma original caso o carregamento seja removido.

Mais informações sobre esse assunto podem ser obtidas no capítulo 4, de Ensaios Mecânicos dos Materiais.

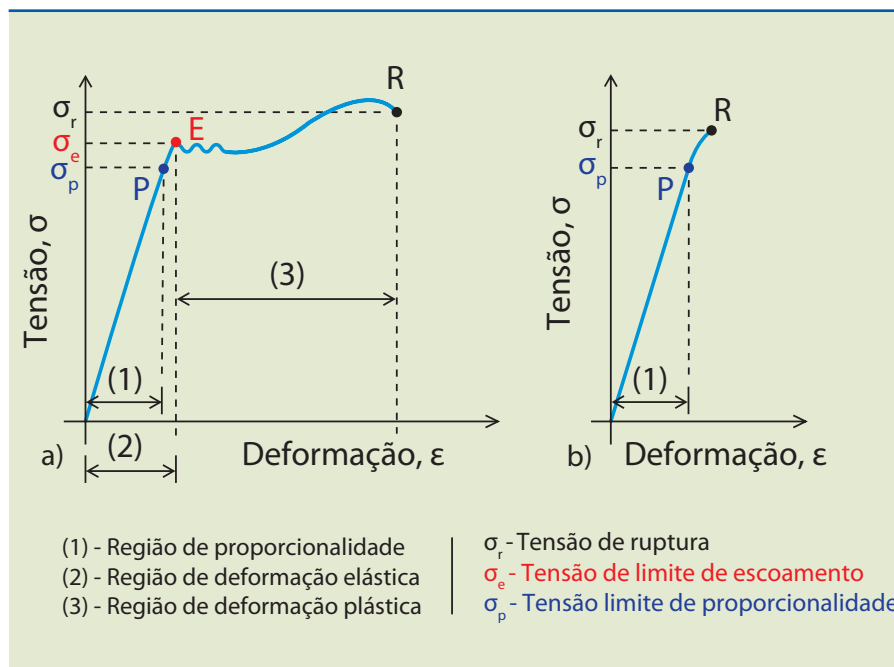


Figura 2.8

a) Gráfico de tensão por deformação para materiais dúcteis;
 b) gráfico de tensão por deformação para materiais dúcteis frágeis.

2.2.2 Propriedades mecânicas

Os diagramas da figura 2.8 possuem distintas regiões:

- Limite ou tensão de proporcionalidade (σ_p): é o maior valor de tensão, para o qual ainda é mantida a relação linear entre a tensão e a deformação (lei de Hooke). Região (1) indicada na figura 2.8.
- Tensão limite de escoamento (σ_e): é o maior valor de tensão para que, caso a carga seja removida, o material retorne à sua geometria original sem apresentar deformações residuais.
- Limite de resistência ou tensão de ruptura (σ_r): é a máxima tensão que o material suporta antes de romper-se. Corresponde ao ponto R nos diagramas da figura 2.8.
- Módulo de elasticidade (E): é a relação constante entre os valores de tensão (σ) e de deformação (ϵ) na fase elástica do material.

A figura 2.9 mostra um gráfico de tensão por deformação apenas da região linear elástica (proporcional). Podemos obter o módulo de elasticidade desse material por:

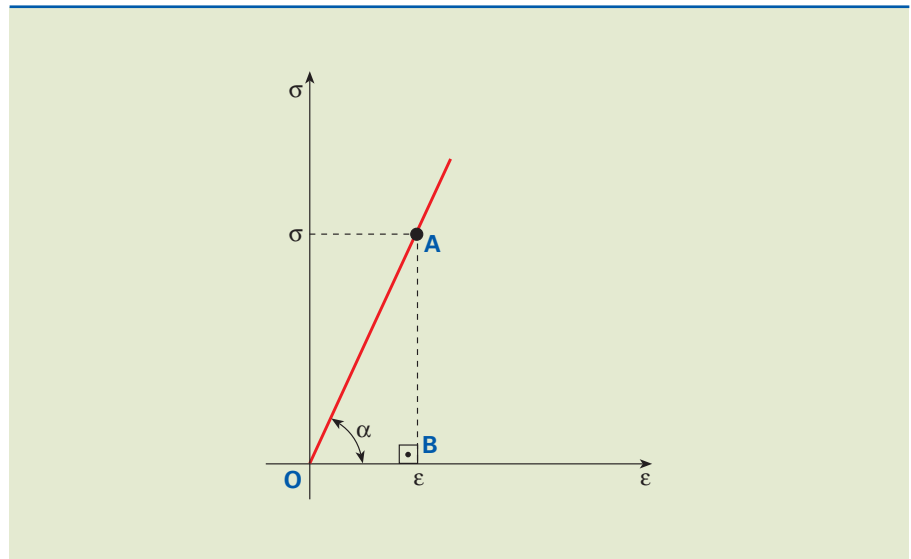
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\sigma}{\epsilon} = E \quad \text{constante para esse material.}$$

Assim, cada material possui um módulo de elasticidade. Para a maioria dos materiais, podemos encontrar o valor do módulo de elasticidade em literaturas como:

1. BRADY, G.S.; CLAUSER, H. R.; VACCARI, J. A. *Materials handbook*. 15. ed. Nova York: McGraw-Hill, 2002.
2. CALLISTER JÚNIOR, W. D. *Ciência e engenharia dos materiais – uma introdução*. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Figura 2.9

Detalhe da região linear elástica no gráfico de tensão por deformação.



- Coeficiente de Poisson (ν) é a relação entre a deformação transversal e a longitudinal (ou axial). Para muitos materiais seu valor está compreendido entre 0,25 e 0,35.

O símbolo ν representa a letra minúscula do alfabeto grego denominada “nu”.

2.2.3 Considerações gerais

As propriedades descritas até o momento apenas são válidas se os materiais forem homogêneos e isotrópicos, ou seja, se tiverem propriedades constantes em todo o seu volume e em qualquer direção.

Um exemplo para distinguir homogêneo e isotrópico é a madeira, pois seu módulo de elasticidade possui valores diferentes para cada direção em função da orientação das fibras. Dessa forma, a madeira é homogênea, entretanto não é isotrópica.

2.3 Tensões admissíveis

A tensão admissível, representada por σ_{adm} ou $\bar{\sigma}$, é obtida dividindo-se o limite de escoamento (σ_e) para materiais dúcteis ou o limite de resistência (σ_r) para materiais frágeis por um número maior que a unidade, denominado **coeficiente de segurança** (ks).

Assim:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{ks} \quad (\text{dúcteis})$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{ks} \quad (\text{frágeis})$$

Concluimos, então, que a tensão admissível (σ_{adm}) é a máxima tensão ou tensão ideal, utilizada para calcular estruturas ou elementos de máquinas com margem de segurança definida.

2.3.1 Coeficiente ou fator de segurança (ks)

Coeficientes de segurança são valores adotados para prevenir eventuais incertezas quanto a propriedades dos materiais, variações dos esforços aplicados etc. Sua determinação requer análise criteriosa das condições de utilização da estrutura, dispositivo ou máquina.

Mesmo em condições em que é possível prever o comportamento de estruturas ou máquinas, cujas condições dos carregamentos são especificadas, sempre há probabilidade de ocorrerem falhas. Existem inúmeros tipos de falhas. Citamos como exemplo trincas, anisotropia do material e sobrecarga que podem não estar previstas no projeto.

No dimensionamento, se adotarmos um coeficiente de segurança muito baixo, estaremos solicitando o material ao máximo e teremos uma estrutura mais leve e mais econômica. Não sobrar, porém, margem suficiente para as situações imprevistas. Por outro lado, se adotarmos um coeficiente de segurança muito alto, essa solução nos levará a projetos antieconômicos ou pouco funcionais.

Alguns elementos que influenciam na determinação do coeficiente de segurança:

- a) natureza do material (frágil ou dúctil);
- b) tipo de solicitação;
- c) risco de morte e danos materiais;
- d) falha do material;
- e) concentração de tensões;
- f) possibilidade de carga acidental;
- g) tipo de equipamento acionado;
- h) aproximações introduzidas no cálculo;
- i) deterioração das propriedades dos materiais;
- j) variação das propriedades dos materiais.

De modo geral, o fator de segurança deve ser obtido em decorrência da utilização do dispositivo (estrutura, máquina, entre outros). Normalmente, para equipamentos de baixa responsabilidade, esse valor pode ser aproximado para a unidade. Há casos, entretanto, em que essa aproximação não pode ser feita, como o do cabo de aço que sustenta elevadores (de passageiros), que possui valor igual a 12,5 segundo a NBR NM207:1999 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

A ABNT é o órgão competente para estipular os coeficientes de segurança de equipamentos mecânicos. Isso é realizado em documentos denominados **Normas Brasileiras (NBR)**. Podemos citar como exemplo a norma técnica NBR 8400, sob o título: “Cálculo de equipamento para levantamento e movimentação de cargas”. Nesse documento são sugeridos os coeficientes de segurança de tais equipamentos.

Quando o coeficiente não é definido por norma, fica a critério do projetista determiná-lo, com base em sua experiência, na viabilidade técnica e financeira, assumindo, porém, a responsabilidade civil e profissional.

2.3.2 Tabela de tensões admissíveis

Como simples orientação, para materiais empregados em construções mecânicas, poderá ser utilizada a tabela 2.1, denominada **tabela de Bach**. Nela são considerados três tipos de carregamentos: estático, intermitente e alternado, conforme indicado na figura 2.10. A tabela fornece também as **tensões admissíveis** de tração, compressão, flexão e cisalhamento à torção para aços de diferentes ligas, para duas condições distintas de manufatura (laminado e trefilado).



| | | Aços | | | | | | | | | |
|------------------|---------|--------------------------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| | | ABNT 1010 | | ABNT 1020 | | ABNT 1030 | | ABNT 1040 | | ABNT 1050 | |
| | | Lami- nado | Trefi- lado | Lami- nado | Trefi- lado | Lami- nado | Trefi- lado | Lami- nado | Trefi- lado | Lami- nado | Trefi- lado |
| σ_r | | 330 | 370 | 390 | 430 | 480 | 530 | 530 | 600 | 630 | 700 |
| σ_e | | 180 | 310 | 210 | 360 | 260 | 450 | 290 | 500 | 350 | 590 |
| Along % 10 cm | | 28 | 20 | 25 | 15 | 20 | 12 | 18 | 12 | 15 | 10 |
| HB | | 95 | 105 | 111 | 121 | 137 | 149 | 149 | 170 | 179 | 197 |
| Solicitação | Carreg. | Tensão admissível segundo Bach (MPa) | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| $\bar{\sigma}_t$ | 1 | 80 | 100 | 100 | 140 | 135 | 155 | 150 | 210 | 200 | 220 |
| | 2 | 50 | 65 | 65 | 90 | 85 | 100 | 95 | 135 | 125 | 145 |
| | 3 | 35 | 45 | 45 | 65 | 60 | 75 | 70 | 90 | 80 | 100 |
| $\bar{\sigma}_c$ | 1 | 80 | 100 | 100 | 140 | 135 | 155 | 150 | 210 | 200 | 220 |
| | 2 | 50 | 65 | 65 | 90 | 85 | 100 | 95 | 135 | 125 | 145 |
| | 3 | 35 | 45 | 45 | 65 | 60 | 75 | 70 | 90 | 80 | 100 |
| $\bar{\sigma}_f$ | 1 | 85 | 110 | 110 | 150 | 145 | 170 | 165 | 230 | 220 | 240 |
| | 2 | 55 | 70 | 70 | 100 | 95 | 110 | 105 | 150 | 140 | 160 |
| | 3 | 40 | 50 | 50 | 70 | 65 | 80 | 75 | 105 | 95 | 115 |
| $\bar{\tau}_t$ | 1 | 50 | 65 | 65 | 85 | 80 | 100 | 95 | 125 | 115 | 135 |
| | 2 | 30 | 40 | 40 | 55 | 50 | 65 | 60 | 80 | 70 | 90 |
| | 3 | 20 | 30 | 30 | 40 | 35 | 50 | 45 | 60 | 50 | 70 |

em que:

σ_r = tensão de ruptura

σ_e = tensão de escoamento

σ_t = tensão admissível à tração

σ_c = tensão admissível à compressão

σ_f = tensão admissível à flexão

τ_t = tensão admissível à torção

Tabela 2.1

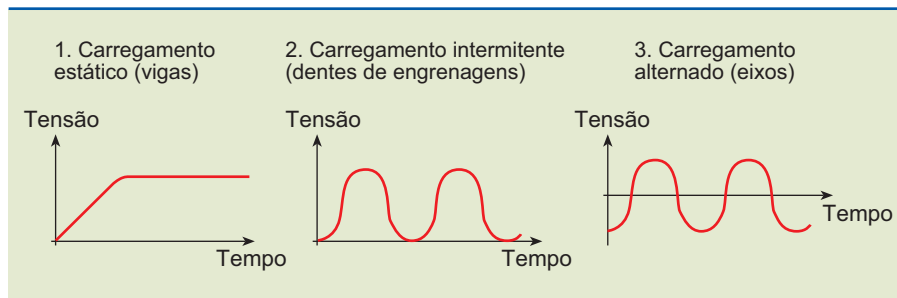
Tabela de Bach.

Fonte: [http://www.demec.ufmg.br/grupos/](http://www.demec.ufmg.br/grupos/labprojmec/bach.htm)

[labprojmec/bach.htm](http://www.demec.ufmg.br/grupos/labprojmec/bach.htm)

Figura 2.10

Condições de carregamento:
 1) estático;
 2) intermitente;
 3) alternado.



2.4 Diagrama dos esforços internos solicitantes

Esse diagrama tem como objetivo determinar a seção crítica da estrutura, ou seja, localizar a seção de maior sollicitação, a fim de dimensioná-la.

2.4.1 Diagrama da força normal

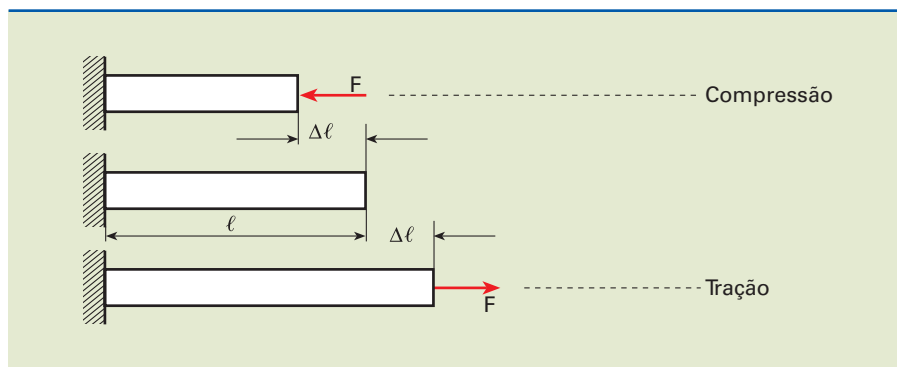
Considere uma barra prismática (de seção transversal constante) carregada na extremidade por uma força axial, conforme indicado na figura 2.11. Essa força axial é aplicada no centro de gravidade da seção transversal.

Ao aplicar a carga, obtém-se determinada deformação da barra, de modo a aumentar ou reduzir seu comprimento.

Dizemos que a barra é tracionada quando a força é dirigida para fora da barra, ou comprimida no sentido contrário.

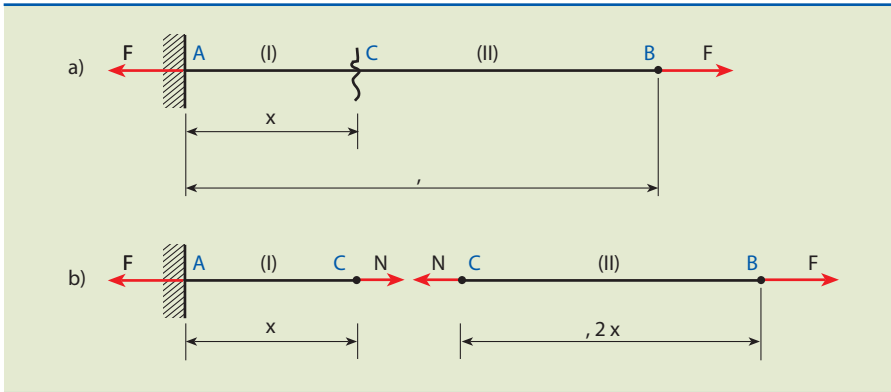
Figura 2.11

Barra prismática de seção transversal constante, sujeita a uma carga de tração ou compressão.



Por convenção, a representação dos esforços de tração, nos diagramas de força normal, é dada no lado superior à linha neutra e tem valor positivo. No caso dos esforços de compressão faz-se o inverso (no lado inferior à linha neutra e tem valor negativo).

Considere uma barra engastada solicitada à tração, conforme indicado no diagrama *a* da figura 2.12. Se cortarmos a barra a uma distância x do engastamento (A) e mantivermos os esforços que agiam antes do corte na barra, o lado esquerdo (I) e o lado direito (II) permanecerão em equilíbrio, como mostram os diagramas *a* e *b* da figura 2.12.

**Figura 2.12**

Barra de seção transversal constante solicitada à tração.

Para manter os lados (I) e (II) em equilíbrio, será necessário aplicar na seção C, esforços internos. Esses esforços são forças internas de mesma direção e módulo, porém com sentido contrário à força externa F .

A essa força interna com direção axial denominamos força normal (N).

Por meio da variável x , pode-se analisar todas as seções transversais da barra.

Portanto, para qualquer valor de x , teremos $N = F$, tracionando tanto a parte do lado esquerdo quanto a parte do lado direito.

Traça-se, então, o diagrama com $N = F$, constante em toda a extensão da barra e com sinal positivo, pois se trata de tração. Esse diagrama pode ser observado na figura 2.13.

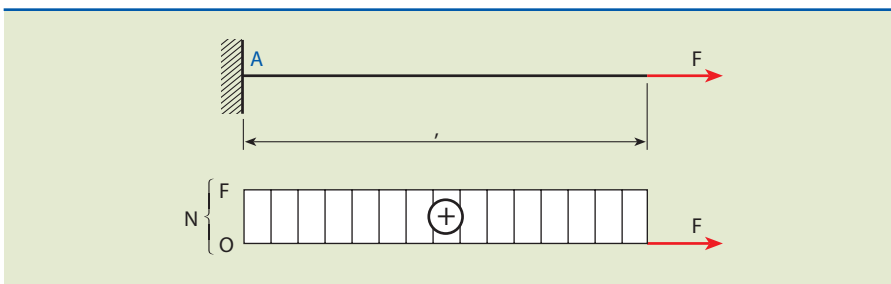
**Figura 2.13**

Diagrama da força normal para uma barra sujeita à tração.

Exemplo

Traçar o diagrama da força normal (N), do carregamento para a estrutura proposta no diagrama *a* da figura 2.14.

O carregamento simplificado pode ser observado no diagrama *b*.

Solução

Considerando que o apoio B é fixo, determinamos a reação x_B .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow x_B - 600 + 200 = 0 \Rightarrow x_B = 400 \text{ N}$$

Como x é variável, analisaremos os intervalos AC, CD e DB.

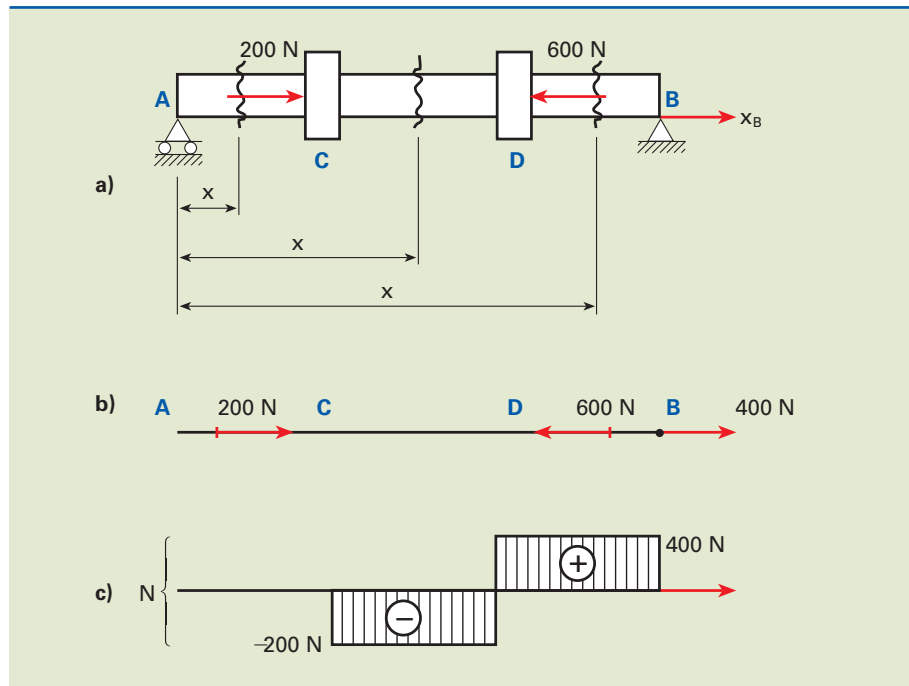
- O trecho AC $\Rightarrow N = 0$
- O trecho CD $\Rightarrow N = -200 \text{ N}$ (compressão)
- O trecho DB $\Rightarrow N = 400 \text{ N}$ (tração)

Dessa forma, obtemos o diagrama da força normal conforme indicado no diagrama *c* da figura 2.14.

Conclui-se que a seção mais solicitada é de 400 N à tração no trecho de D até B.

Figura 2.14

- a) Estrutura proposta;
- b) carregamento simplificado;
- c) diagrama da força normal.



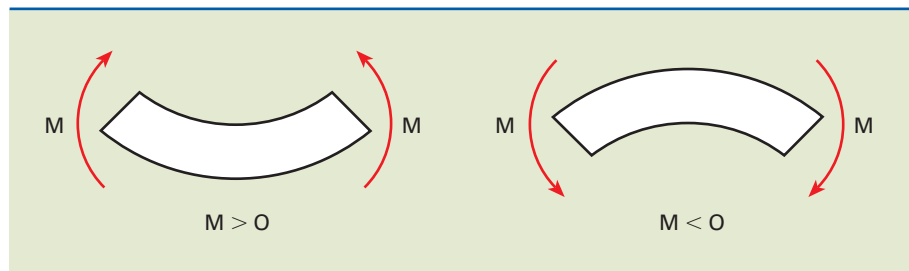
2.4.2 Diagrama da força cortante e do momento fletor

Convenções de sinais

O momento fletor é positivo quando tende a tracionar as fibras inferiores da parte analisada, e negativo se tracionar as fibras superiores. Esquemáticamente, isso pode ser observado na figura 2.15.

Figura 2.15

Convenção de sinais para momento fletor.



A força cortante é positiva se girar o elemento em análise no sentido horário, caso contrário é negativo. Essa convenção de sinais é indicada na figura 2.16.

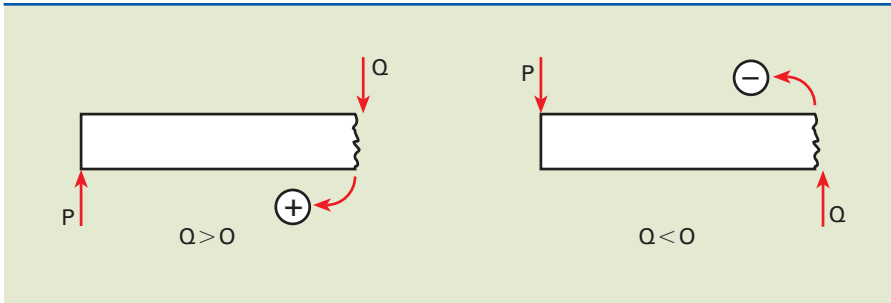


Figura 2.16

Convenção de sinais para força cortante.

Elaboração dos diagramas

Consideremos uma viga em balanço solicitada pela carga concentrada P na extremidade livre B , conforme a figura 2.17.

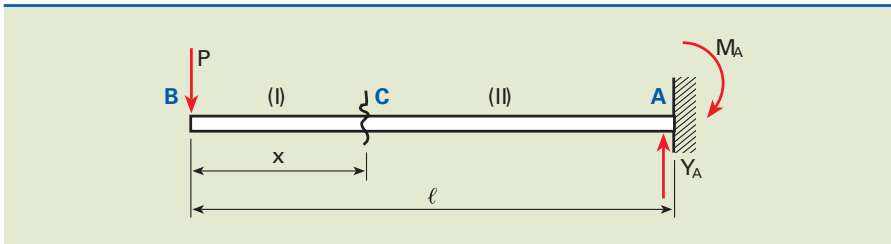


Figura 2.17

Viga em balanço sob carga concentrada P .

Determinamos as expressões das forças cortantes (Q) e momento fletor (M).

Inicialmente, calculamos as reações no apoio A engastado.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + y_A = 0 \Rightarrow y_A = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + P \cdot \ell = 0 \Rightarrow M_A = P \cdot \ell$$

Secionamos a barra a uma distância x da extremidade B , conforme mostra a figura 2.18, mantendo os esforços que agiam anteriormente ao corte, de modo que as duas partes (I) e (II) permaneçam em equilíbrio.

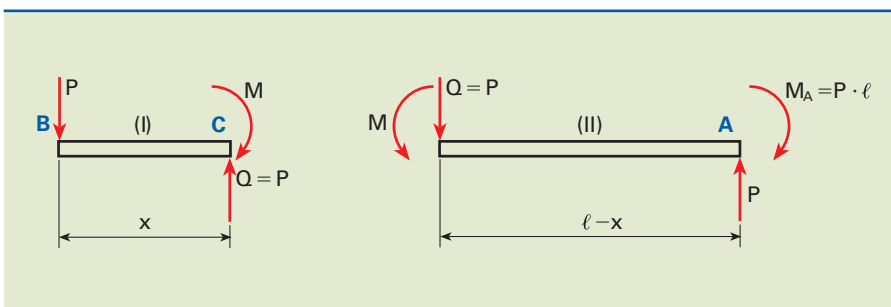


Figura 2.18

Diagrama de corpo livre para estrutura proposta.

Analisamos, então, a força cortante (Q) e o momento fletor (M) na seção C .

$$\begin{aligned} \text{Lado esquerdo (I)} \Rightarrow \quad Q &= -P && \text{(gira a parte I no sentido anti-horário)} \\ M &= -P \cdot x && \text{(traciona as fibras superiores da barra)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lado direito (II)} \Rightarrow \quad Q &= -P && \text{(gira a parte II no sentido anti-horário)} \\ M &= -P \cdot x && \text{(traciona as fibras superiores da barra)} \end{aligned}$$

Para determinarmos M do lado direito, impomos a condição $\Sigma M_A = 0$, como se fosse um carregamento com cargas externas.

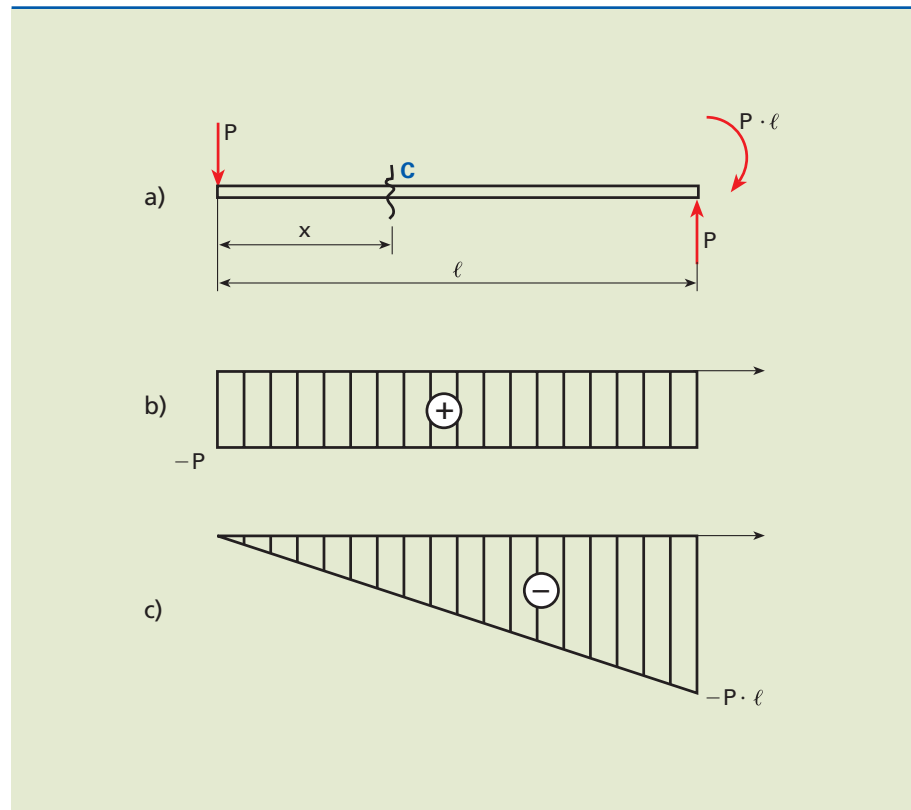
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= M + P(\ell - x) - P \cdot \ell = 0 \\ M + P \cdot \ell - P \cdot x - P \cdot \ell &= 0 \\ M &= P \cdot x \end{aligned}$$

A força cortante (Q) e o momento fletor (M) do lado esquerdo (I) e lado direito (II) são iguais, isto é, o resultado independe do lado analisado. A escolha do lado, portanto, deve ser a mais conveniente.

Os diagramas – de corpo livre (a), da força cortante (b) e do momento fletor (c) – são apresentados na figura 2.19. Note que a força cortante (Q) é constante e negativa em toda a extensão, porque tende a girar no sentido anti-horário. O momento fletor (M) é uma função linear, com valor máximo no engastamento, e tem valor negativo porque traciona as fibras superiores da barra.

Figura 2.19

- a) Diagrama de corpo livre;
b) diagrama da força cortante;
c) diagrama do momento fletor.



Exemplos

1. Determinar as expressões de Q e M e construir os respectivos diagramas para uma viga simplesmente apoiada, conforme figura 2.20.

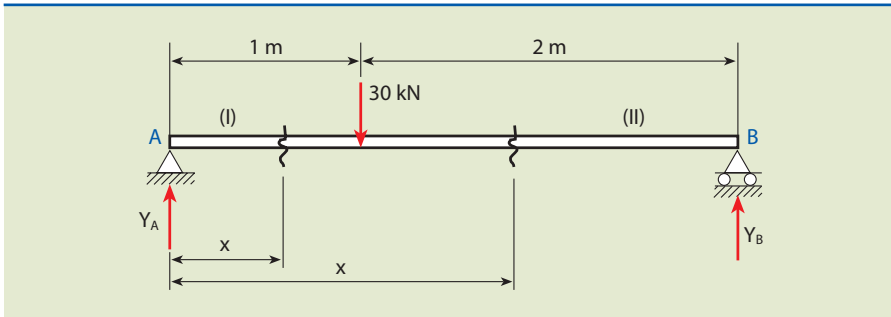


Figura 2.20

Esboço de uma viga simplesmente apoiada para exemplo 1.

Solução

Nesse caso, é necessário inicialmente determinar as reações de apoio y_A e y_B . Usamos as equações de equilíbrio:

- 1) $\sum F_y = 0 \Rightarrow y_A + y_B - 30 = 0 \Rightarrow y_A + y_B = 30 \text{ kN}$
- 2) $\sum M_A = 0 \Rightarrow y_B \cdot 3 - 30 \cdot 1 = 0 \Rightarrow y_B \cdot 3 = 30 \Rightarrow y_B = 10 \text{ kN}$
- 3) $\sum M_B = 0 \Rightarrow -y_A \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 0 \Rightarrow -y_A \cdot 3 = -60 \Rightarrow y_A = 20 \text{ kN}$

A equação 1 é redundante e foi utilizada apenas para verificação dos resultados obtidos y_A e y_B .

Consideremos agora uma seção distante x da extremidade **A** até a carga concentrada de 30 kN, isto é, compreendida no intervalo $0 < x < 1 \text{ m}$.

Secionando a barra distante x da extremidade **A** e mantendo os esforços que agiam anteriormente ao corte, obtemos os respectivos diagramas de corpo livre, conforme indicado na figura 2.21.

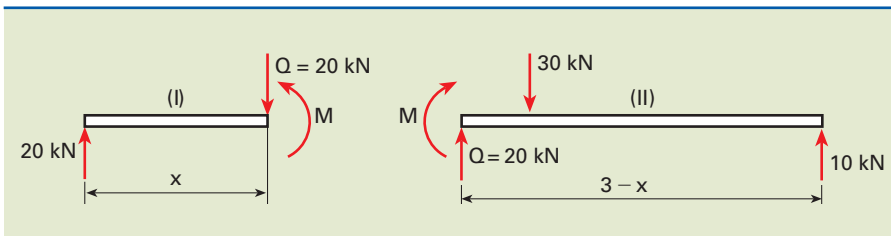


Figura 2.21

Diagramas de corpo livre para exemplo 1.

No intervalo observado no setor I, a força cortante (Q) é positiva, porque tende a girar a barra no sentido horário, e o momento fletor também é positivo, pois traciona as fibras inferiores.

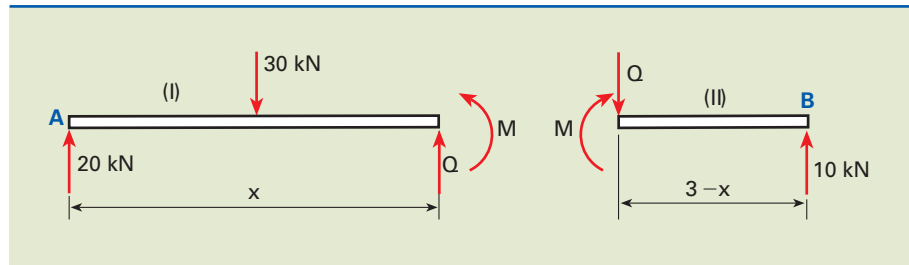
$$\text{Dessa forma, para } 0 < x < 1 \text{ m} \quad \begin{cases} Q = 20 \text{ kN} \\ M = 20 \cdot x \end{cases}$$

O mesmo poderia ser realizado para o setor II. Embora o resultado obtido necessariamente seja o mesmo, ele fica como proposta de exercício.

Analisando o intervalo de $1 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$, obtemos o diagrama de corpo livre como indicado pela figura 2.22.

Figura 2.22

Diagramas de corpo livre para exemplo 1, para intervalo de $1 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$.



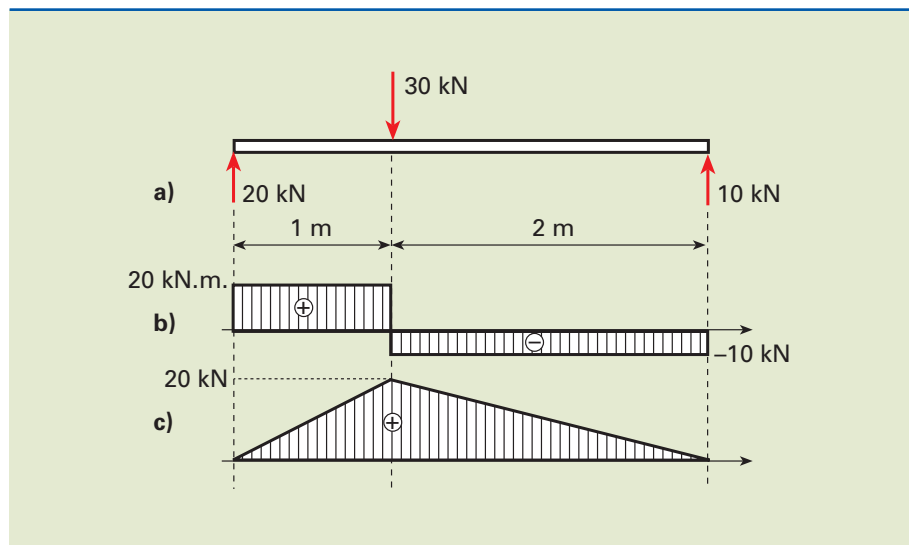
Como a análise pode ser realizada para qualquer setor, é escolhido por conveniência o setor II. Portanto, para $1 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$

$$\begin{cases} Q = -10 \text{ kN} \\ M = 10(3 - x) = -10x + 30 \end{cases}$$

A representação gráfica é indicada nos diagramas *a*, *b* e *c* da figura 2.23, respectivamente diagrama de corpo livre, diagrama da força cortante e diagrama do momento fletor.

Figura 2.23

- a) Diagrama de corpo livre;
b) diagrama da força cortante;
c) diagrama do momento fletor.



O diagrama da força cortante é formado de dois trechos de reta, horizontais.

$$1^{\text{o}} \text{ trecho} \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ m} \Rightarrow Q = 20 \text{ kN}$$

$$2^{\text{o}} \text{ trecho} \Rightarrow 1 \text{ m} < x < 3 \text{ m} \Rightarrow Q = -10 \text{ kN}$$

Observe que, nos pontos de aplicações de **cargas concentradas**, há uma **descontinuidade** correspondente ao valor da carga aplicada.

O diagrama do momento fletor também é constituído por dois trechos de reta, mas não apresenta nenhuma descontinuidade.

$$1^{\text{o}} \text{ trecho} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ m} \Rightarrow M = 20x$$

Como a função de M é linear, bastam dois pontos para definir a reta.

$$\text{Assim, para } x = 0 \Rightarrow M = 0 \text{ e para } x = 1 \text{ m} \Rightarrow M = 20 \cdot 1 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$2^{\text{o}} \text{ trecho} \Rightarrow 1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m} \Rightarrow M = -10x + 30$$

Como o momento é uma função linear, para

$$x = 1 \text{ m} \Rightarrow M = -10 \cdot 1 + 30 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{e para } x = 3 \text{ m} \Rightarrow M = -10 \cdot 3 + 30 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

2. Determinar as expressões de Q e M e construir os respectivos diagramas no carregamento com cargas concentradas, conforme indicado na figura 2.24.

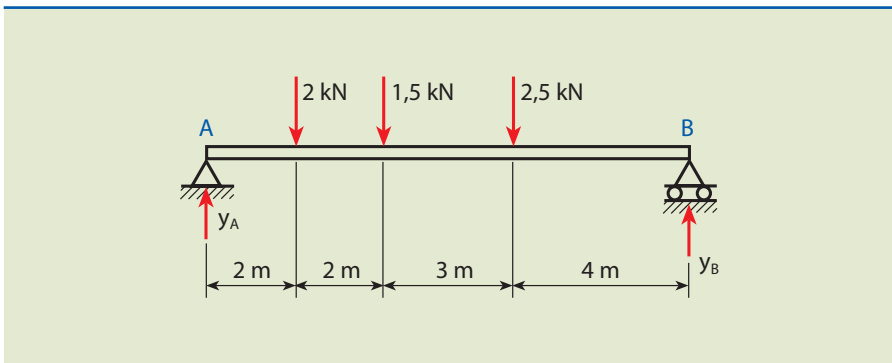


Figura 2.24

Esboço de carregamento com cargas concentradas (exemplo 2).

Solução

Inicialmente, obtemos as reações nos apoios **A** e **B**, utilizando as equações da estática.

$$1) \sum F_x = 0 \Rightarrow y_A + y_B - 2 - 1,5 - 2,5 = 0 \Rightarrow y_A + y_B = 6 \text{ kN}$$

$$2) \sum M_A = 0 \Rightarrow y_B \cdot 11 - 2,5 \cdot 7 - 1,5 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B \cdot 11 - 17,5 - 6 - 4 = 0 \Rightarrow y_B \cdot 11 = 27,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{27,5}{11} \Rightarrow y_B = 2,5 \text{ kN}$$

Substituindo y_B na equação 1, temos:

$$y_A + 2,5 = 6 \Rightarrow y_A = 3,5 \text{ kN}$$

Obtidas as reações de apoio, podemos determinar a força cortante (unidade em kN). Usando o mesmo critério aplicado no exemplo 1, temos:

- para $0 < x < 2 \text{ m} \Rightarrow Q = 3,5 \text{ kN}$
- para $2 \text{ m} < x < 4 \text{ m} \Rightarrow Q = 3,5 - 2 = 1,5 \text{ kN}$
- para $4 \text{ m} < x < 7 \text{ m} \Rightarrow Q = 3,5 - 2 - 1,5 = 0$
- para $7 \text{ m} < x < 10 \text{ m} \Rightarrow Q = 3,5 - 2 - 1,5 - 2,5 = -2,5 \text{ kN}$

Observe que a força cortante (Q) é constante entre duas cargas concentradas consecutivas e, na seção de apoio à direita, ela coincide com a reação, com sinal trocado.

Vejam, agora, os momentos fletores (M), lembrando que as forças que tracionam as fibras inferiores produzem momentos fletores positivos. Assim:

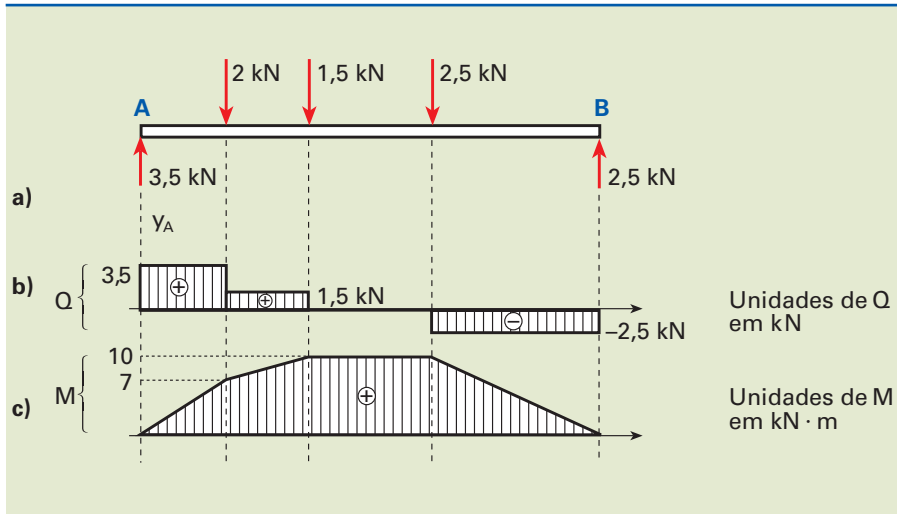
- para $0 \leq x \leq 2 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5 \cdot x$
- para $2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5x - 2(x - 2)$
- para $4 \text{ m} \leq x \leq 7 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5x - 2(x - 2) - 1,5(x - 4)$
- para $7 \text{ m} \leq x \leq 11 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5x - 2(x - 2) - 1,5(x - 4) - 2,5(x - 7)$

Como todas as expressões são funções lineares, conclui-se que o diagrama de momentos é constituído por quatro segmentos de reta. Assim, basta calcular os valores do momento nas seções em que existem cargas concentradas:

- para $x = 0 \Rightarrow M = 0$
- para $x = 2 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5 \cdot 2 = 7 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- para $x = 4 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5 \cdot 4 - 2(4 - 2) = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- para $x = 7 \text{ m} \Rightarrow M = 3,5 \cdot 7 - 2(7 - 2) - 1,5(7 - 4) = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- para $x = 10 \text{ m} \Rightarrow M = 0$

A representação gráfica pode ser visualizada nos diagramas *a*, *b* e *c* da figura 2.25, que são, respectivamente, diagrama de corpo livre, diagrama da força cortante e diagrama do momento fletor.



**Figura 2.25**

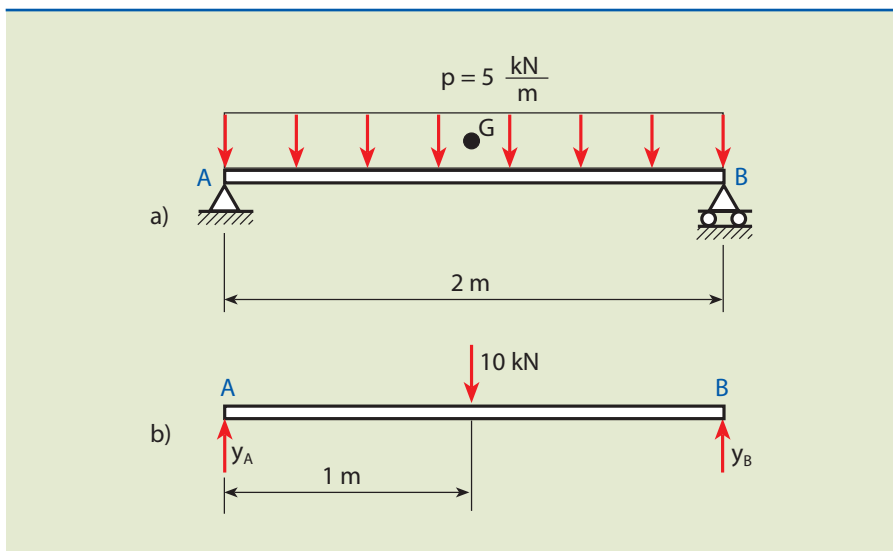
a) Diagrama de corpo livre;
 b) diagrama da força cortante;
 c) diagrama do momento fletor.

3. Determinar as expressões de Q e M e construir os respectivos diagramas na viga solicitada, com carga uniformemente distribuída, conforme figura 2.26a.

Solução

Inicialmente, substituímos a carga distribuída por uma carga equivalente concentrada em seu centro de gravidade, como mostra a figura 2.26b.

$$P = p \cdot \ell = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kN}$$

**Figura 2.26**

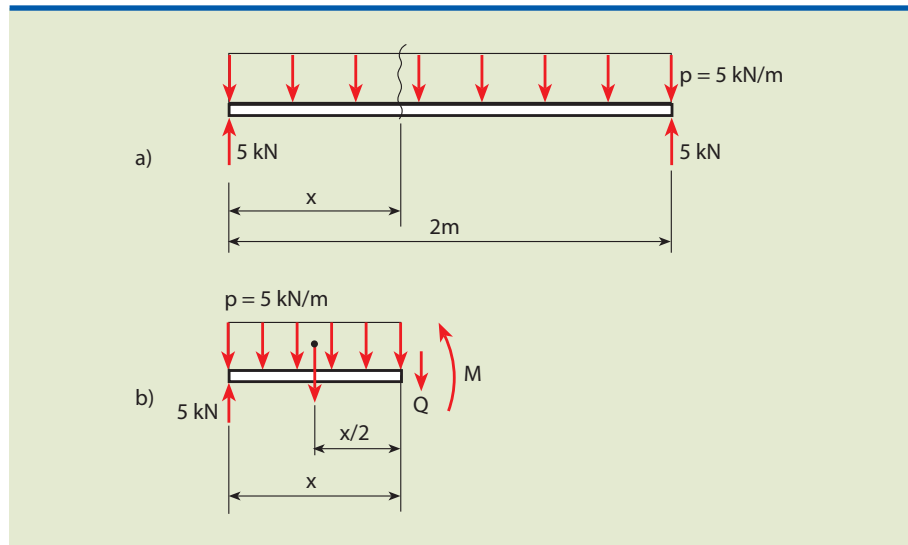
a) Esboço de carga distribuída;
 b) substituição da carga distribuída por equivalente.

Substituindo o carregamento original pelo simplificado, obtemos as reações nos apoios y_A e y_B de valor igual a 5 kN .

Voltando ao carregamento original, se cortássemos a viga em uma seção distante x do apoio A, conforme mostra a figura 2.27a, poderíamos elaborar o diagrama de corpo livre de modo a equilibrar tal setor, como indicado na figura 2.27b.

Figura 2.27

- a) Indicação da seção de corte;
b) diagrama de corpo livre.



Sabendo que a carga distribuída de comprimento x é determinada pela expressão:

$P_x = p \cdot x = 5 \cdot x$, podemos obter as expressões de Q e M a uma distância x da extremidade A .

Assim, do lado esquerdo do carregamento, temos:

$$Q = 5 - P_x = 5 - 5x \Rightarrow Q = -5x + 5$$

$$M = 5 \cdot x - P_x \cdot \frac{x}{2} = 5x - 5x \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow M = -2,5x^2 + 5x$$

Como o momento fletor é uma função do 2º grau e a força cortante do 1º grau, podemos prever que se trata respectivamente de uma parábola e um segmento de reta.

Então, temos para a força cortante (Q):

$$Q = -5x + 5 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Q = 5 \text{ kN}$$

$$x = 2 \text{ m} \Rightarrow Q = -5 \text{ kN}$$

e para o momento fletor (M):

$$M = -2,5x^2 + 5x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M = 0$$

$$x = 2 \text{ m} \Rightarrow M = -2,5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 0$$

Obviamente, dois pontos não são suficientes para definir uma parábola. Sendo assim, como é sabido, em uma equação de segundo grau ($y = ax^2 + bx + c$), se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e o ponto de máximo ocorre quando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(-2,5)} = 1\text{ m}$$

ou simplesmente determinando a condição para a qual a função da cortante é igual a zero.

$$\text{Assim, } Q = -5x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1\text{ m.}$$

Pode-se determinar o valor máximo de M substituindo $x = 1\text{ m}$, na expressão:

$$M = -2,5x^2 + 5x = -2,5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 2,5\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Com os pontos: } x = 0 \Rightarrow M = 0$$

$$x = 2\text{ m} \Rightarrow M = 0$$

$$x = 1\text{ m} \Rightarrow M = 2,5\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Incluindo a informação de que a concavidade de M , quando $x = 1\text{ m}$, é voltada para baixo, podemos traçar os diagramas de corpo livre (a), da força cortante (b) e do momento fletor (c), conforme figura 2.28.

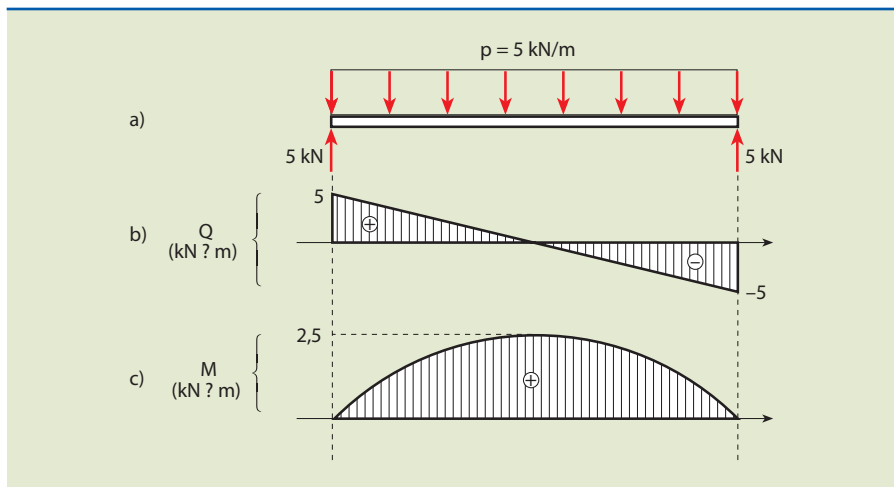


Figura 2.28

- a) Diagrama de corpo livre;
- b) diagrama da força cortante;
- c) diagrama do momento fletor.

4. Traçar os diagramas da força cortante (Q) e do momento fletor (M) no carregamento proposto pela figura 2.29.

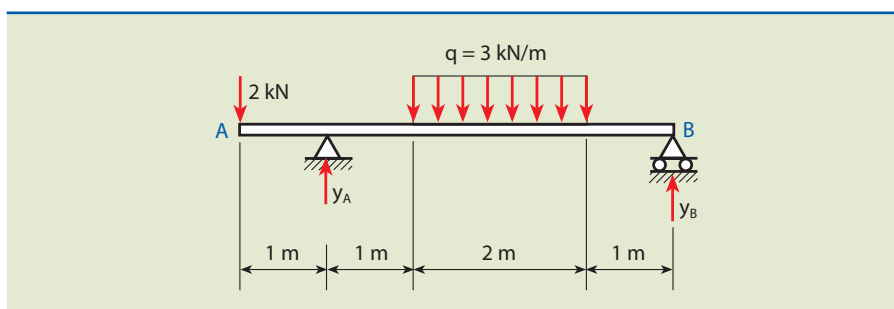


Figura 2.29

Esboço da força cortante e do momento fletor do exemplo 4.

Solução

No início, substituímos a carga uniformemente distribuída pela resultante e calculamos as reações nos apoios A e B.

$$1) \sum F_y = 0 \Rightarrow y_A + y_B - 2 - 6 = 0 \Rightarrow y_A + y_B = 8 \text{ kN}$$

$$2) \sum M_A = 0 \Rightarrow y_B \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow y_B \cdot 4 - 12 + 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_B \cdot 4 = 10 \Rightarrow y_B = 2,5 \text{ kN}$$

$$\text{Substituindo, obtemos: } y_A + 2,5 = 8 \Rightarrow y_A = 5,5 \text{ kN}$$

Calculadas as reações de apoio, determinamos Q e M.

Força cortante (Q):

- $0 < x < 1 \text{ m} \Rightarrow Q = -2 \text{ kN}$
- $1 \text{ m} < x < 2 \text{ m} \Rightarrow Q = 3,5 \text{ kN}$
- $4 \text{ m} < x < 5 \text{ m} \Rightarrow Q = -2,5 \text{ kN}$

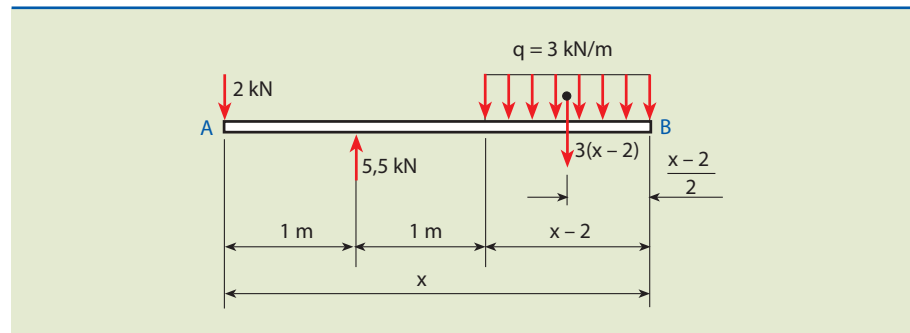
Momento fletor (M):

- $0 \leq x \leq 1 \text{ m} \Rightarrow M = -2x$
- $1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m} \Rightarrow M = -2 \cdot x + 5,5(x - 1) = 3,5x - 5,5$
- $4 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m} \Rightarrow M = 2,5(5 - x) = -2,5x + 12,5$

Para determinarmos a força cortante e o momento fletor no intervalo em que está a carga distribuída, precisamos analisar uma seção que esteja contida nesse trecho, como sugerido pela figura 2.30.

Figura 2.30

Trecho sugerido para análise da força cortante.



Então, para $2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$, temos:

- o momento fletor (M) distante x da extremidade da barra de:

$$M = -2x + 5,5(x - 1) - 3(x - 2)\left(\frac{x - 2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = -2x + 5,5x - 5,5 - \frac{3}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = -2x + 5,5x - 5,5 - 1,5(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = -1,5x^2 + 6x + 5,5x - 2x - 5,5 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = -1,5x^2 + 9,5x - 11,5$$

- e a força cortante Q , para $2\text{ m} < x < 4\text{ m}$, de:

$$Q = -2 + 5,5 - 3(x - 2) = -3x + 6 - 2 + 5,5 \Rightarrow \underline{Q = -3x + 9,5}$$

Como a força cortante (Q) é uma função linear, bastam dois pontos para definir a reta.

$$\text{Tomemos: } x = 2\text{ m} \Rightarrow Q = -3 \cdot 2 + 9,5 = 3,5\text{ kN}$$

$$x = 4\text{ m} \Rightarrow Q = -3 \cdot 4 + 9,5 = -2,5\text{ kN}$$

O diagrama do momento fletor é uma parábola com concavidade voltada para baixo, e seu ponto máximo ocorre quando:

$$Q = 0 \Rightarrow -3x + 9,5 = 0 \Rightarrow x = 3,167\text{ m}.$$

Substituindo na função M , $M = -1,5x^2 + 9,5x - 11,5$, temos:

$$M_{m\grave{a}x} = -1,5 \cdot (3,167)^2 + 9,5 \cdot 3,167 - 11,5$$

$$M_{m\grave{a}x} = -15,04 + 30,09 - 11,5 = 3,55$$

portanto, quando $x = 3,167\text{ m} \Rightarrow M_{m\grave{a}x} = 3,55\text{ kN} \cdot \text{m}$.

Dessa forma, possuímos todos os dados necessários para elaborar os diagramas de corpo livre (a), força cortante (b) e momento fletor (c), indicados na figura 2.31.

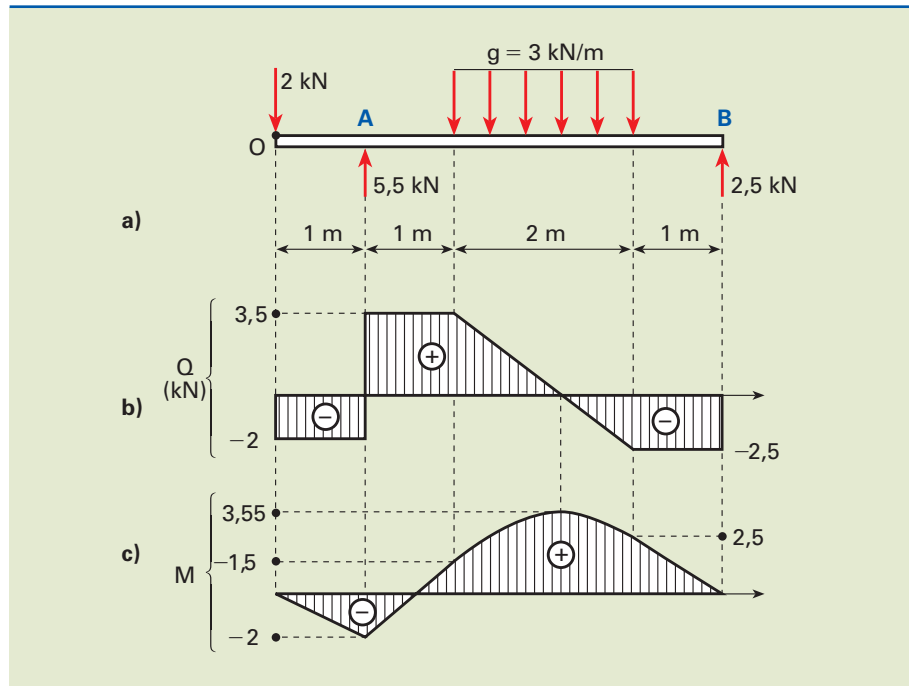
A força cortante pode ser obtida também derivando a função do momento:

$$Q = \frac{dM}{dx} = -3x + 9,5$$

Figura 2.31

Exemplo 4:

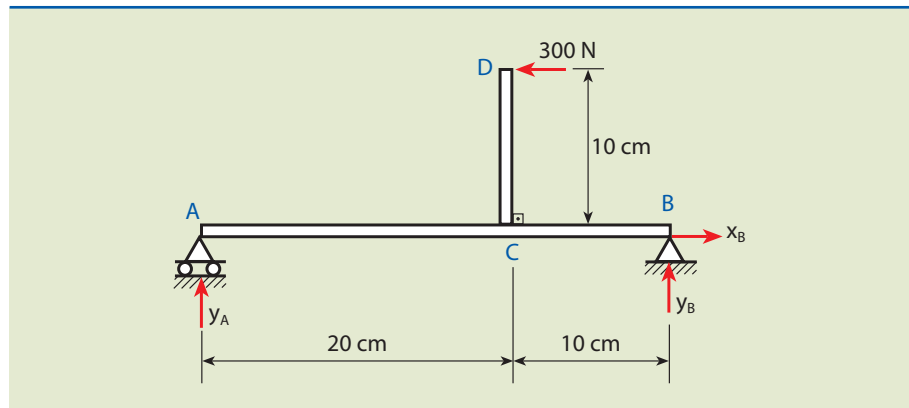
- a) diagrama de corpo livre;
- b) diagrama da força cortante;
- c) diagrama do momento fletor.



5. Para a estrutura formada por barras, conforme indicado na figura 2.32, determinar os diagramas dos esforços internos solicitantes N, Q e M.

Figura 2.32

Exemplo 5: estrutura formada por barras.



Solução

Inicialmente, determinaremos as reações de apoios.

- 1) $\sum M_A = 0 \Rightarrow y_B \cdot 30 + 300 \cdot 10 = 0 \Rightarrow y_B = -100 \text{ N}$
- 2) $\sum M_B = 0 \Rightarrow -y_A \cdot 30 + 300 \cdot 10 = 0 \Rightarrow y_A = 100 \text{ N}$
- 3) $\sum F_y = 0 \Rightarrow y_A + y_B = 0$
- 4) $\sum F_x = 0 \Rightarrow x_B - 300 = 0 \Rightarrow x_B = 300 \text{ N}$

O diagrama de corpo livre pode ser observado na figura 2.33.

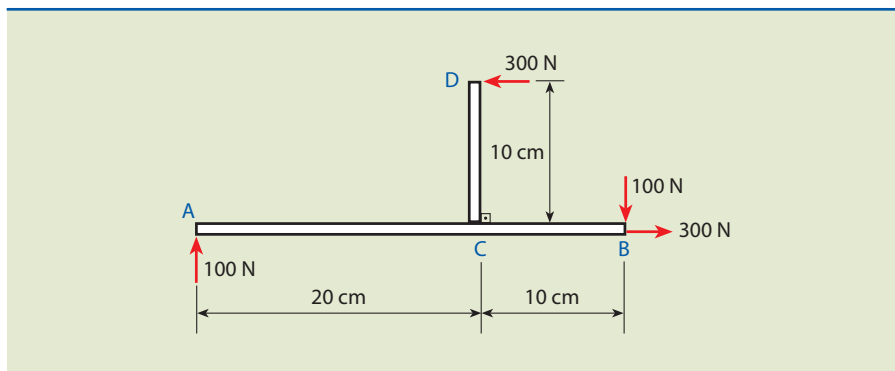


Figura 2.33

Diagrama de corpo livre.

Na barra CD, temos:

- força cortante $Q = -300 \text{ N}$;
- momento fletor (M) tracionando as fibras do lado direito, que tomaremos como positivo.
- portanto, $M = 300 \cdot x$.

A referência dessa variável x é o ponto D com direção vertical descendente.

Para analisar a barra AB, é necessário transportar a carga concentrada de 300 N, aplicada em D, para o ponto C.

Observe que, ao transportarmos a carga para o ponto C, devemos incluir o momento que ela promove em relação a tal ponto, esquematicamente ilustrado na figura 2.34.

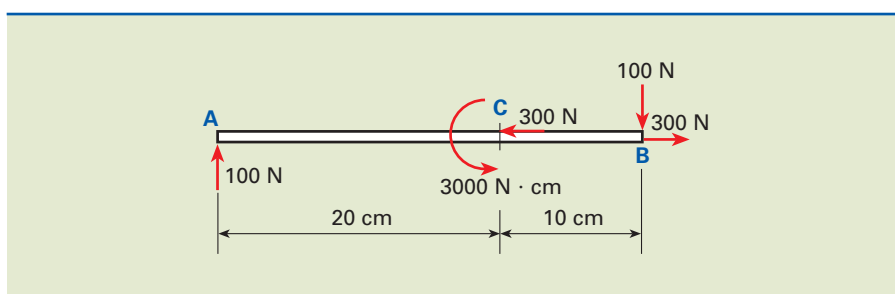


Figura 2.34

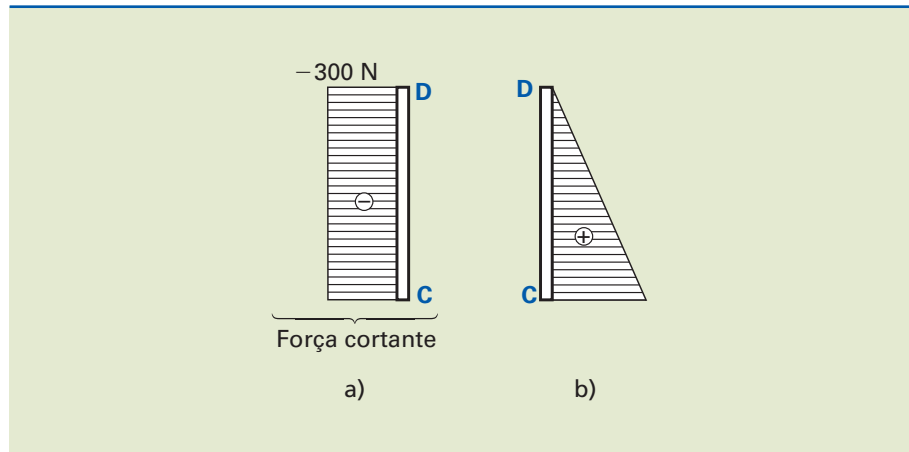
Diagrama de corpo livre equivalente.

Os esforços internos solicitantes para a barra CD podem ser observados nos diagramas de força cortante (a) e no do momento fletor (b). A figura 2.36 mostra os diagramas de força normal (a), cortante (b) e momento fletor (c) para a barra AB.

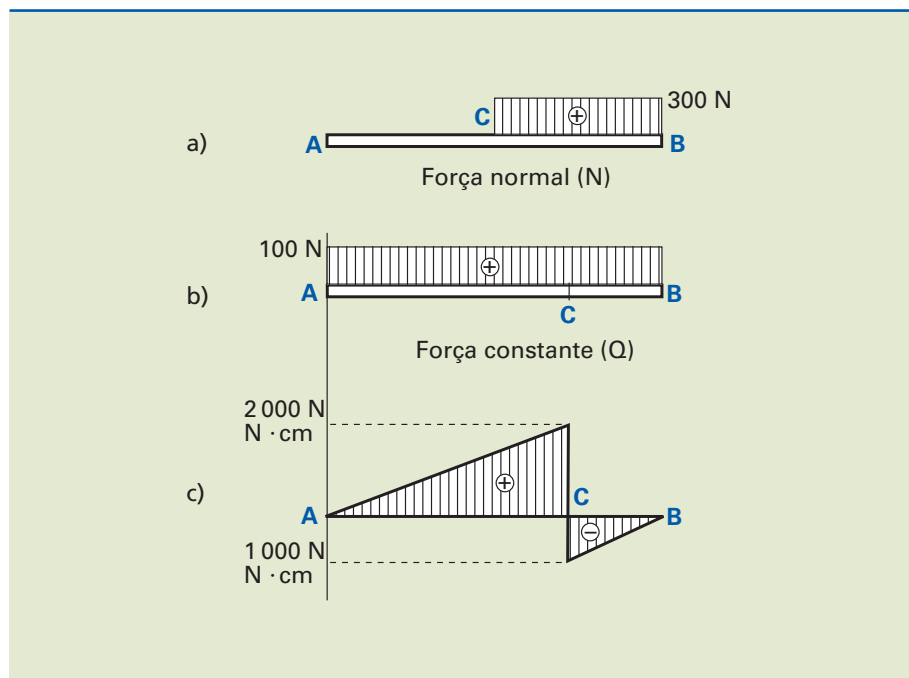
Conclusão: a força cortante é constante ao longo da viga, e o momento fletor é representado por dois segmentos de reta paralelos com uma descontinuidade no ponto C de $M = 3000 \text{ N} \cdot \text{cm}$, equivalente à aplicação do momento externo em AB, no ponto C.

Figura 2.35

- a) Cortante no trecho CD;
b) momento fletor no trecho CD.

**Figura 2.36**

- a) Diagrama de força normal;
b) diagrama de força cortante;
c) diagrama de momento fletor.



2.4.3 Diagrama do momento torçor

Diz-se que uma barra está solicitada à torção quando está submetida a um momento torçor no plano da seção transversal.

A viga possui seção circular constante e está sob ação de um par de forças paralelas de mesma intensidade e sentidos opostos (binário de intensidade igual a F), atuando no plano da seção transversal.

O momento torçor (M_t) para essa situação é igual ao produto da força (F) pela distância (d).

$$M_t = F \cdot d$$

Convenção de sinal

O momento torçor (M_t) é um esforço interno solicitante. Dessa forma, para a condição indicada, substituímos o binário por um momento equivalente M_{te} (momento torçor externo), uma vez que a barra está sujeita apenas a esse carregamento. Para que a barra esteja em equilíbrio deve haver um momento torçor resistente M_{tr} de mesmo valor e oposto a ele.

Vamos, então, definir a convenção de sinais.

Se cortássemos a seção a uma distância x do engastamento e mantivéssemos os esforços que agiam antes do corte, o lado esquerdo (I) e direito (II) continuariam em equilíbrio, conforme indicado na figura 2.37.

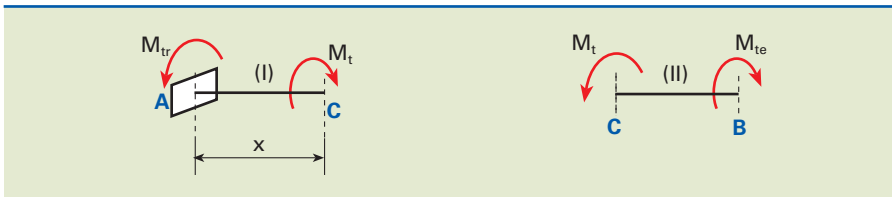


Figura 2.37

Convenção de sinais para momento torçor.

Observe que o momento torçor (M_t) nos lados I e II tende a girar a seção da viga em C no sentido horário, que convencionamos como positivo; no sentido contrário, como negativo. O diagrama do momento torçor é mostrado na figura 2.38. Notamos que neste caso é positivo e constante em toda a viga.

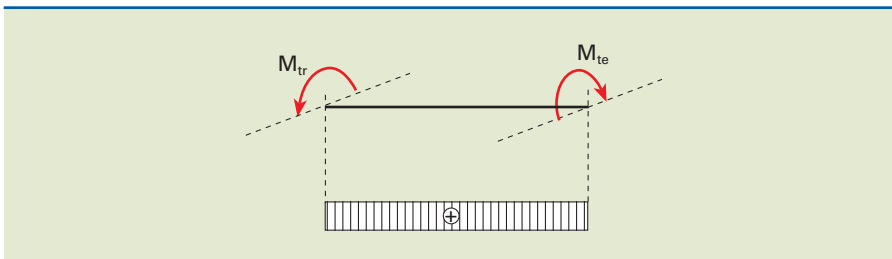


Figura 2.38

Diagrama do momento torçor.

Exemplo

No eixo solicitado conforme figura 2.39, construir o diagrama do momento torçor.

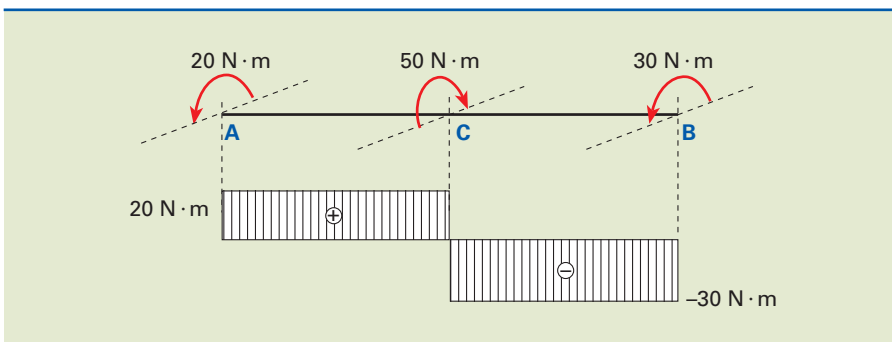


Figura 2.39

Esboço do exemplo de momento torçor.

Trecho AC $\Rightarrow M_t = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$ (constante)

Trecho CB $\Rightarrow M_t = -30 \text{ N} \cdot \text{m}$ (constante)

Observe que no ponto C temos uma descontinuidade de $M_t = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$, equivalente ao momento externo de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$.

2.5 Tração e compressão

2.5.1 Tensão normal

O conceito de tensão normal foi abordado na seção 2.1.1 (Classificação dos esforços). Sendo assim é sabido que, para um elemento prismático sujeito a uma força normal de tração, a intensidade da tensão normal (σ) será:

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (\text{MPa}; \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}; \dots)$$

em que:

S = Área da seção transversal (m^2 ; mm^2 ; ...)

N = Força normal (kN; kgf, ...)

As tensões de tração que atuam em determinado elemento serão representadas por σ_t e as de compressão, por σ_c .

No Sistema Internacional, a força P é expressa em newtons (N), a área S em metros quadrados (m^2) e a tensão σ em (N/m^2), unidade denominada pascal (Pa).

O uso prático da unidade pascal é muito restrito. São utilizados, então, múltiplos dessa unidade, como quilopascal (kPa), megapascal (MPa) e gigapascal (GPa).

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

2.5.2 Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade foi previamente definido na seção 2.2.2. Com base nos gráficos de tensão por deformação, foi constatada uma região linear (região proporcional) cuja tangente do ângulo formado entre o segmento de reta e o eixo



das deformações possui o mesmo valor numérico que o módulo de elasticidade (ver seção 2.2.2, figura 2.9). Dessa forma:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = E$$

A deformação unitária (ε) para uma barra foi definida como a relação de sua variação dimensional ($\Delta \ell$) em função de seu comprimento inicial (ver seção 2.2.2). Sendo assim:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}. \text{ Sabendo que } \sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ e substituindo em } E = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

$$\text{obtemos a seguinte relação: } E = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \frac{F \cdot \ell}{S \cdot \Delta \ell}$$

Dessa forma, o alongamento total (variação dimensional) é dado por:

$$\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot S} \text{ (mm)}$$

2.5.3 Dimensionamento de peças

No dimensionamento, impomos a condição:

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq \sigma_{\text{adm}}, \text{ sendo: } \sigma_{\text{adm}}, \text{ a tensão admissível (MPa).}$$

Para a condição de mínimo custo, recomenda-se que as máximas tensões atuantes sejam iguais às admissíveis.

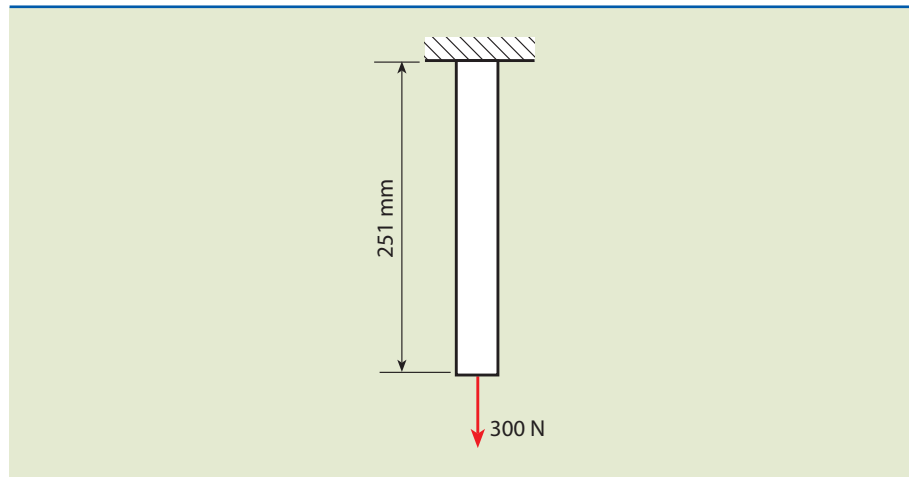
$$\sigma = \frac{F}{S} = \sigma_{\text{adm}}$$

Exemplos

1. Um fio de aço de comprimento de 251 mm e diâmetro de 1 mm foi submetido a uma carga de tração de 300 N, conforme indicado na figura 2.40. Como resultado desse carregamento observa-se um alongamento de 0,48 mm. Sabendo que sob essas condições o material não ultrapassa a tensão de proporcionalidade, determinar o valor da tensão normal e a deformação unitária porcentual.



Figura 2.40
Esboço do exemplo 1.



Dados: $\ell_0 = 251 \text{ mm}$; $d = 1 \text{ mm}$; $F = 300 \text{ N}$ e $\Delta \ell = 0,48 \text{ mm}$

$$\text{A área de seção é: } S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 1^2}{4} = 0,785 \text{ mm}^2$$

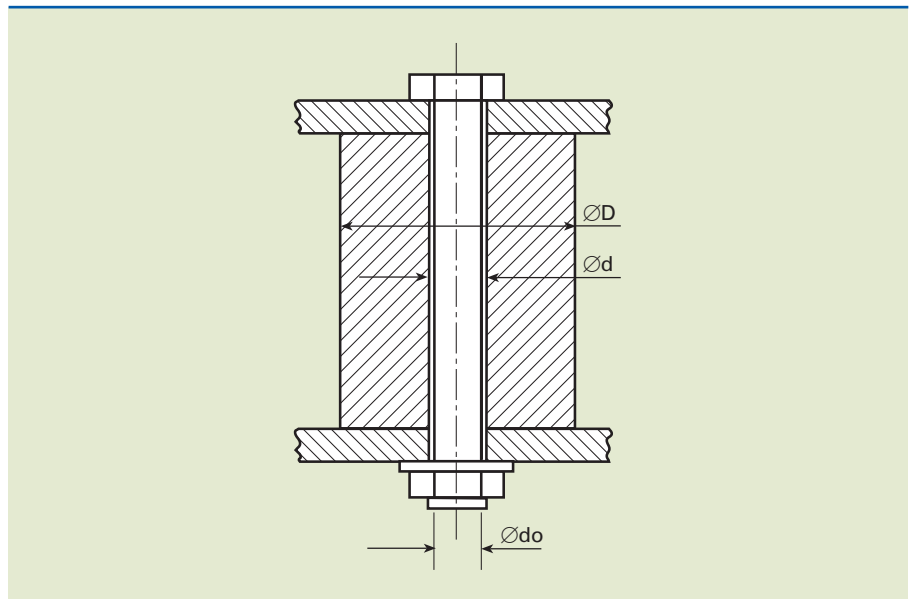
$$\text{A tensão é: } \sigma = \frac{F}{S} = \frac{300}{0,785} = 382,2 \Rightarrow \sigma = 382,2 \text{ MPa}$$

$$\text{A deformação porcentual é: } \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{0,48}{251} = 1,9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot 100\% = 0,19\% \Rightarrow \varepsilon = 0,19\%$$

2. Para o esquema de fixação apresentado na figura 2.41, determinar os diâmetros d e D , sabendo que a porca exerce no parafuso uma força axial de 8 kN.

Figura 2.41
Esboço do exemplo 2.



Dados: parafuso: $\bar{\sigma}_t = 100 \text{ MPa}$; bucha: $\bar{\sigma}_c = 50 \text{ MPa}$; $d = d_p + \text{folga}$ e $\text{folga} = 1 \text{ mm}$

d = diâmetro interno da bucha

D = diâmetro externo da bucha

Podemos notar que o parafuso está sujeito à tração (por causa de um prévio torque aplicado na porca). Assim, a dimensão do núcleo do parafuso (d_o) será:

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \bar{\sigma}_t \Rightarrow S \geq \frac{N}{\bar{\sigma}_t} = \frac{8\,000}{100} = 80 \text{ mm}^2$$

$$S = \frac{\pi d_o^2}{4} \geq 80 \Rightarrow d_o \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 80}{\pi}} = 10,1 \Rightarrow d_o \geq 10,1 \text{ mm}$$

Sabemos que parafuso é um elemento normalizado e devemos escolher um que possua diâmetro do núcleo superior a 10,1 mm. Considerando que o parafuso M12 possui diâmetro nominal $d_p = 12 \text{ mm}$, podemos determinar o diâmetro interno da bucha.

$$d = d_p + 1 = 12 + 1 = 13 \Rightarrow d = 13 \text{ mm}$$

Os esforços de tração para o parafuso são transferidos para a bucha de modo a comprimi-la. Essa condição é esquematicamente ilustrada na figura 2.42.

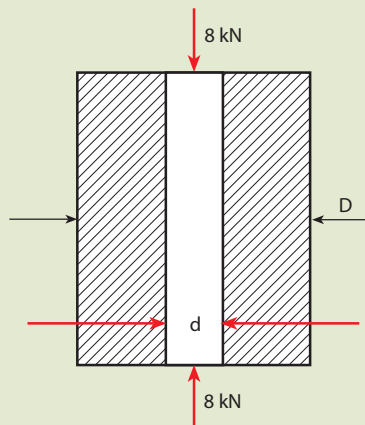


Figura 2.42

Esboço esquemático de bucha.

Dessa forma, podemos determinar o diâmetro externo da bucha por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq \bar{\sigma}_c \Rightarrow S \geq \frac{F}{\bar{\sigma}_c} = \frac{8\,000}{50} = 160$$

$$S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \geq 160 \Rightarrow \pi D^2 - \pi d^2 \geq 4 \cdot 160$$

$$\pi D^2 \geq 4 \cdot 160 + \pi d^2 = 4 \cdot 160 + \pi \cdot 13^2 = 640 + 530,9$$

$$\pi D^2 \geq 1170,9 \Rightarrow D \geq \sqrt{\frac{1170,9}{\pi}} = 19,3 \Rightarrow D \geq 19,3 \text{ mm}$$

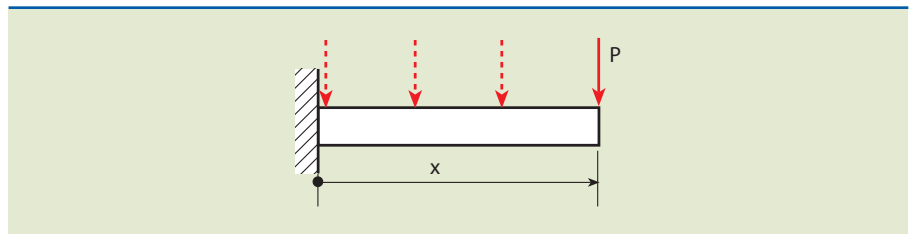
Como o diâmetro externo deve ser maior que 19,3 mm, escolhemos arbitrariamente $D = 20 \text{ mm}$.

2.6 Cisalhamento puro

As forças internas e suas respectivas tensões correspondentes, até o momento discutidas, são normais à seção transversal considerada. A tensão de cisalhamento ou tensão cisalhante ocorre quando há existência de carregamentos transversais.

A figura 2.43 mostra esquematicamente uma viga engastada em uma extremidade e solicitada por uma carga transversal P .

Figura 2.43
Viga engastada sob ação de uma carga P .



Para a condição indicada na figura 2.43, a força cortante (Q) e o momento fletor (M) no engastamento são, respectivamente:

$$Q = P \text{ e } M = -P \cdot x$$

Notamos que, à medida que o carregamento (P) se aproxima do engastamento, a distância (x) diminui. O momento fletor, sendo diretamente proporcional à distância, também diminui. Imaginando uma condição em que essa distância seja tão pequena, de tal forma que se possa considerar desprezível o momento fletor, a viga estará sujeita apenas à força cortante.

Dessa forma, podemos dizer que, se o esforço predominante que atua na seção transversal é a força cortante (Q), temos cisalhamento puro.

Durante o dimensionamento, em diversas ocasiões, podemos considerar o cisalhamento como cisalhamento puro. Por exemplo, em juntas rebitadas, chavetas, pinos etc. A figura 2.44 mostra esquematicamente alguns exemplos de situações em que o conceito de cisalhamento puro pode ser empregado.

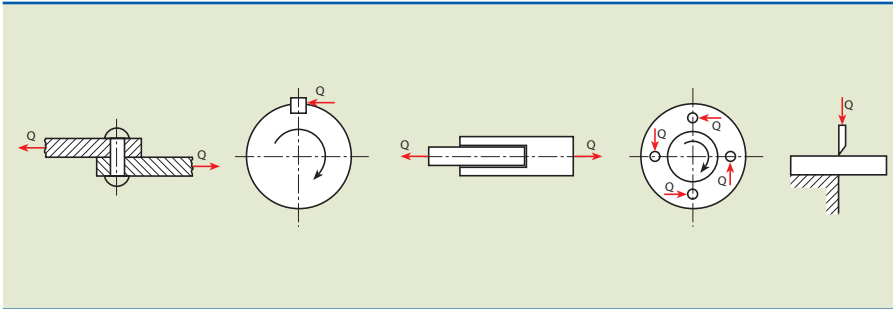


Figura 2.44
Exemplos de cisalhamento puro.

2.6.1 Tensão de cisalhamento

Admitindo que a tensão de cisalhamento (τ) distribui-se uniformemente em toda seção transversal de área S em determinada estrutura, temos:

$$\tau = \frac{Q}{S}$$

No dimensionamento, limitam-se as tensões atuantes em relação à tensão admissível ao escoamento (τ_{adm}):

$$\tau = \frac{Q}{S} \leq \tau_{adm}$$

em que:

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_e}{ks}$$

τ_e = tensão de cisalhamento ao escoamento

ks = fator de segurança

A condição mais econômica se dará quando: $\tau = \frac{Q}{S} = \tau_{adm}$

Existem casos em que o objetivo é cisalhar (cortar) o material para obter o produto desejado. A tensão de cisalhamento, então, deverá ser maior que a tensão de ruptura do material.

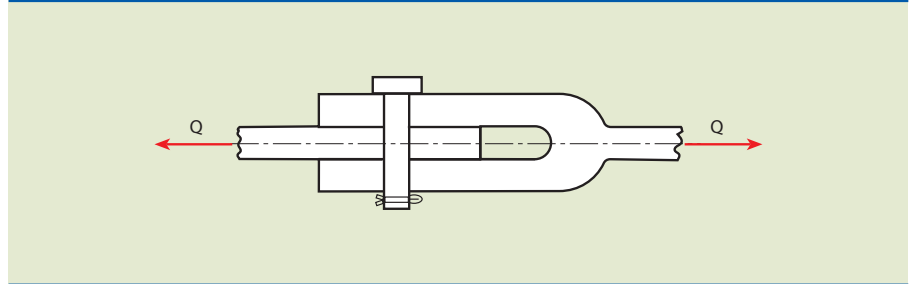
$\tau = \frac{Q}{S} > \tau_{rup}$, em que: τ_{rup} = tensão de cisalhamento a ruptura

Exemplos

1. A junta com um pino, da figura 2.45, foi submetida a uma força externa (Q) de 40 kN. Admitindo a distribuição uniforme das tensões de cisalhamento nas seções, calcular o valor do diâmetro (d) do pino solicitada ao cisalhamento.

Figura 2.45

Esboço do exemplo 1.



Dado: $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$.

Solução

Como temos duas seções solicitadas: $\tau = \frac{Q}{2S} \leq \tau_{adm}$, em que S = área de uma se-

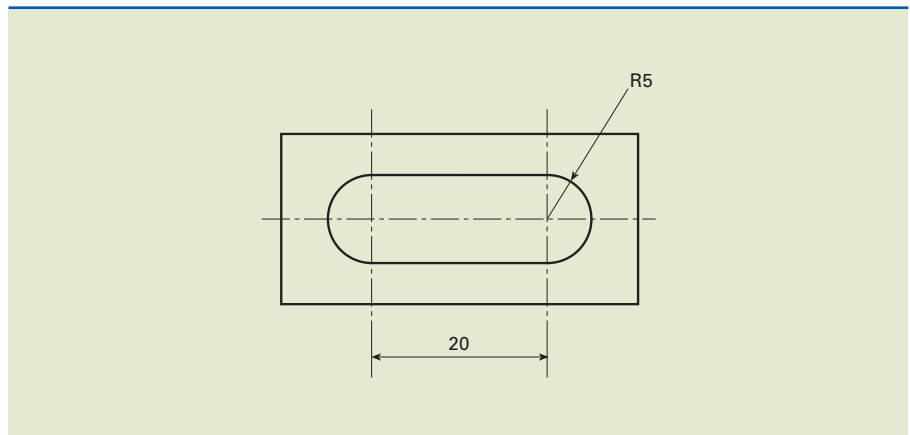
ção solicitada, $\frac{Q}{2S} \leq \tau_{adm} \Rightarrow S \geq \frac{Q}{2 \cdot \tau_{adm}} = \frac{40 \cdot 10^3}{2 \cdot 50} = 400 \Rightarrow S \geq 400 \text{ mm}^2$

$S = \frac{\pi d^2}{4} \geq 400 \Rightarrow d^2 \geq \frac{4 \cdot 400}{\pi} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 400}{\pi}} = 22,6 \quad \therefore d \geq 22,6 \text{ mm}$

2. Determinar a força de corte para estampar o furo mostrado na figura 2.46.

Figura 2.46

Esboço do exemplo 2.



Dados:

$\tau_{rup} = 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$; e = espessura da chapa = 2,5 mm; $\tau = \frac{Q}{S} > \tau_{rup}$

A seção (S) de cisalhamento denominamos S_{corte} , em que:

$S_{\text{corte}} = \text{perímetro de corte} \cdot \text{espessura de corte}$

$$S_{\text{corte}} = (2 \cdot 20 + 2\pi \cdot 5) \cdot 2,5 = 178,5 \Rightarrow S_{\text{corte}} = 178,5 \text{ mm}^2$$

$$\frac{Q}{S_{\text{corte}}} > \tau_{\text{rup}} \Rightarrow Q > \tau_{\text{rup}} \cdot S_{\text{corte}} = 300 \cdot 178,5$$

Portanto, $Q > 42840 \text{ N}$.

2.7 Flexão simples

Quando um elemento é solicitado a força transversal ou a um momento fletor, observa-se que os esforços internos devidos a esse carregamento não são apenas de cisalhamento.

Esses carregamentos fazem com que a barra tenda a se deformar, de modo que, para essa seção transversal, obtemos esforços internos de tração e compressão.

A teoria a ser desenvolvida deverá considerar que as forças e os momentos estejam em um plano e conttenham o eixo da viga. Por hipótese, o plano que contém as forças perpendiculares ao eixo é um plano de simetria da seção da viga, conforme indicado na figura 2.47.

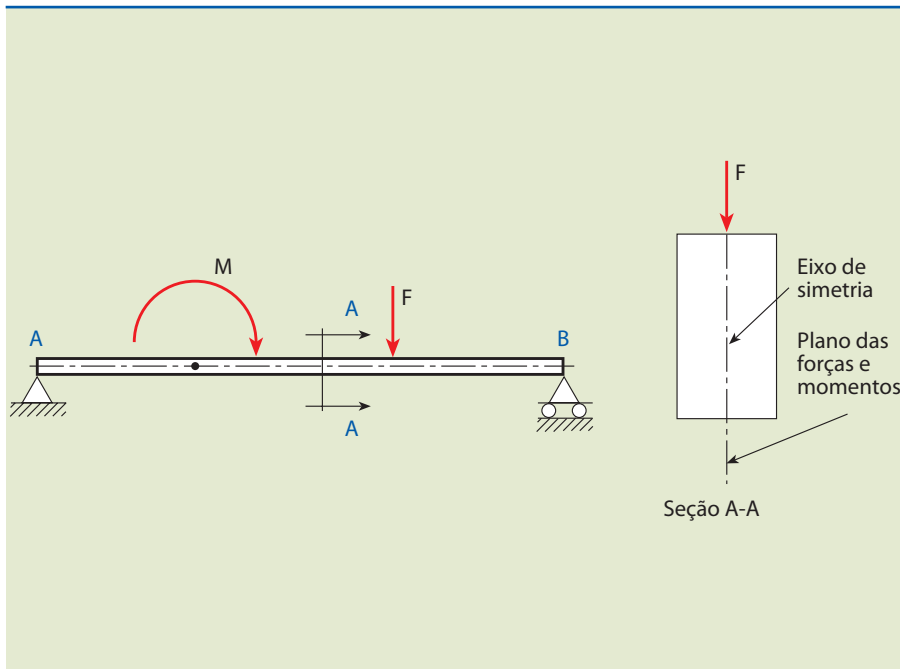


Figura 2.47

Localização de aplicação dos carregamentos.

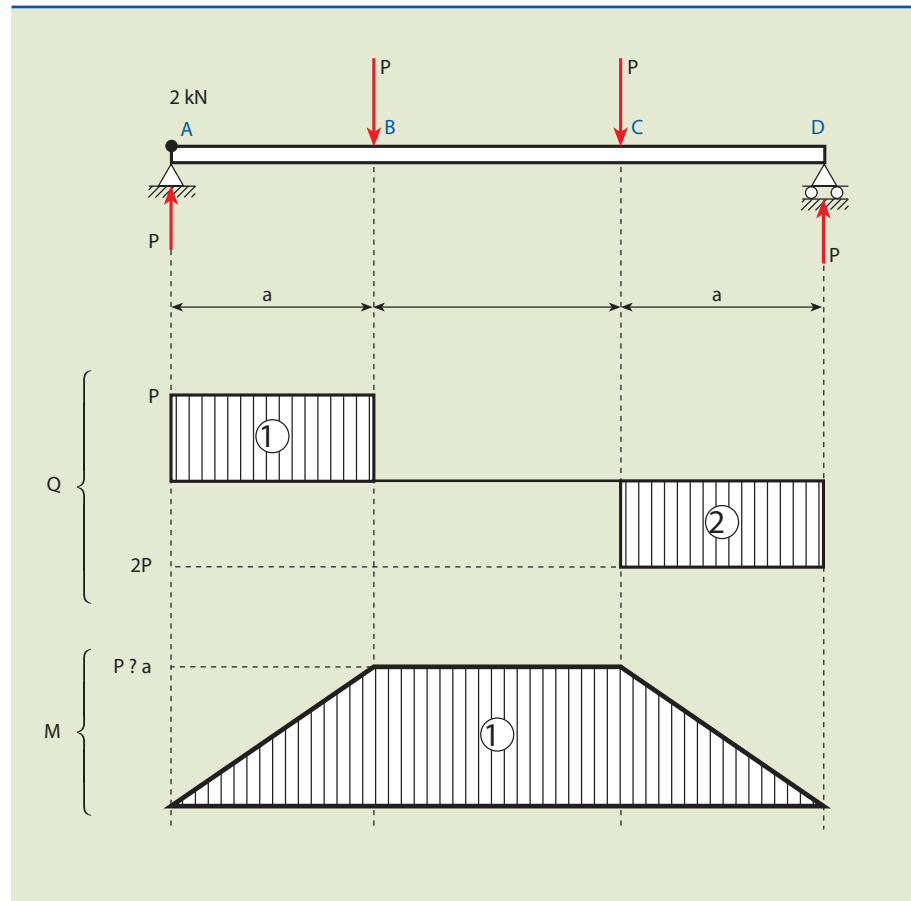
2.7.1 Tipos de flexão

Quando uma barra solicitada à flexão apresenta apenas momento fletor, nas diferentes seções transversais, diz-se que a **flexão é pura**. Entretanto, se as seções são solicitadas, simultaneamente, por momento fletor e por força cortante, temos a **flexão simples**.

Por exemplo, no carregamento da figura 2.48, no trecho BC, temos somente momento fletor, portanto, trata-se de uma flexão pura. Já nos trechos AB e CD temos força cortante e momento fletor, portanto, uma flexão simples.

Figura 2.48

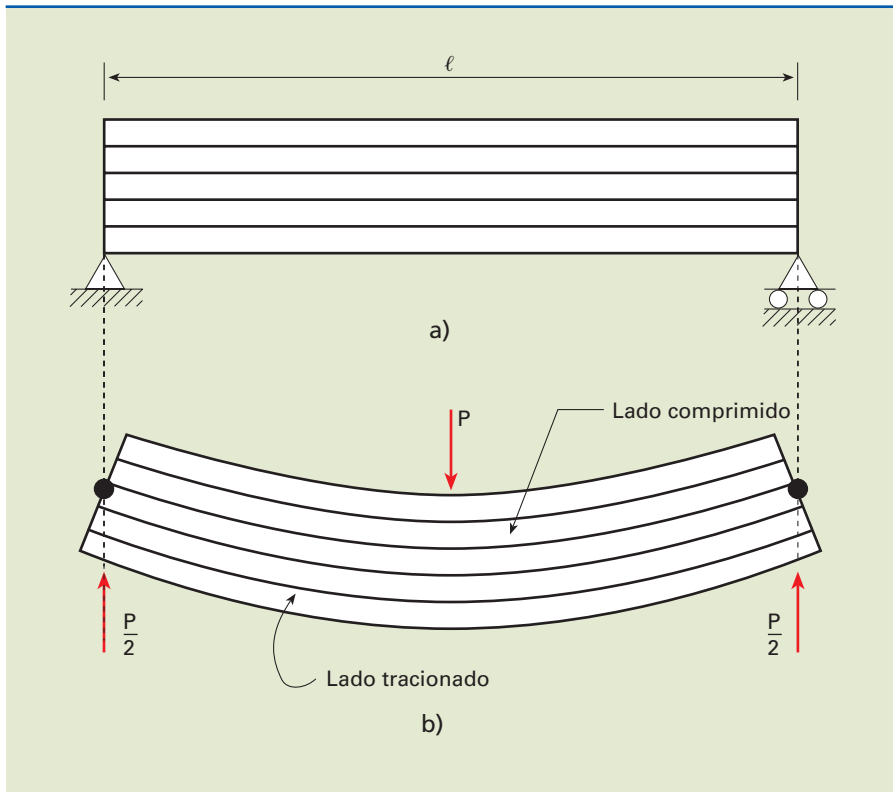
Exemplo de carregamento.



2.7.2 Tensões normais nas vigas

Vamos considerar uma viga formada por infinitas fibras longitudinais, como indicado no esboço *a* da figura 2.49. Antes de aplicar a carga, todas as fibras tinham o mesmo comprimento ℓ . Após a viga ser submetida à carga P (esboço *b* da figura 2.49), as fibras inferiores são tracionadas, ou melhor, seu comprimento aumenta, e as superiores são comprimidas, isto é, seu comprimento diminui.

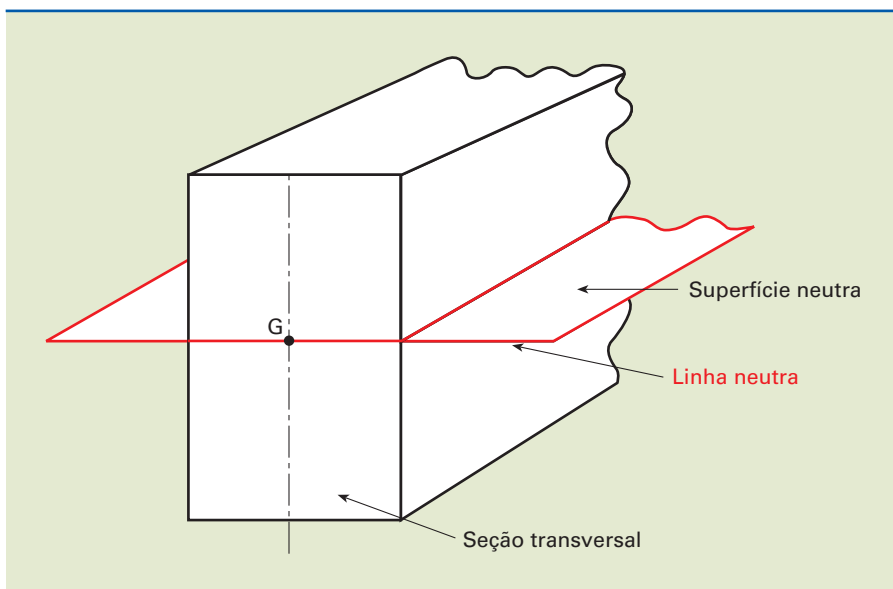
Essas variações de comprimento dão origem a tensões normais (σ) nas fibras. As que alongam dão origem a tensões normais de tração. As que encurtam originam tensões de compressão.

**Figura 2.49**

a) Viga composta por infinitas fibras sem carregamento;
 b) viga solicitada por um carregamento transversal.

Existe um conjunto de fibras que formam uma superfície plana não solicitadas quer a tração quer a compressão que denominamos **superfície neutra** ou **plano neutro**.

A interseção da superfície neutra com a seção transversal da viga é denominada **linha neutra** (LN) e, esquematicamente, pode ser observada na figura 2.50. A linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção transversal.

**Figura 2.50**

Desenho esquemático indicando a linha neutra.

Em uma viga cuja seção transversal contém um eixo de simetria, e está solicitada a um momento fletor (M), ocorre a tensão normal (σ) em uma fibra que dista y da linha neutra, sendo igual a:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y, \text{ em que:}$$

M = momento fletor

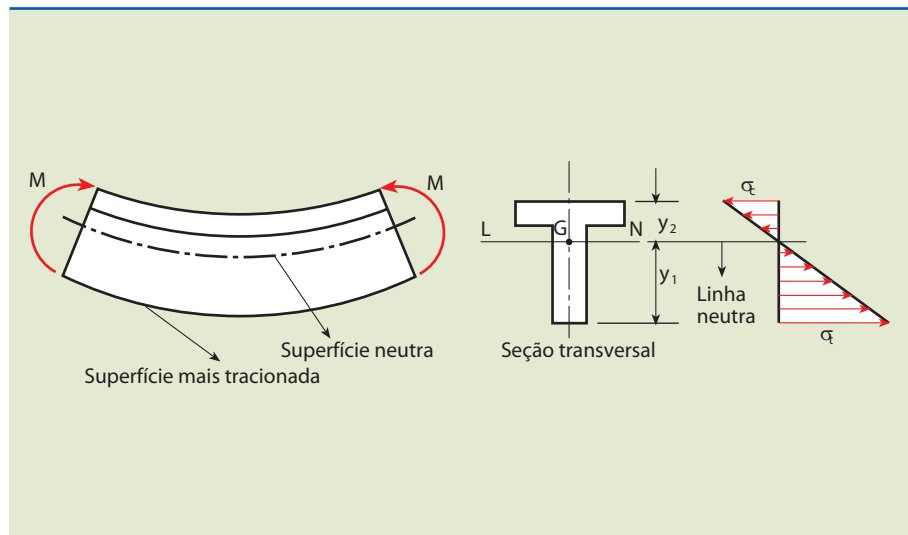
I = momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra (LN)
(ver mais sobre momento de inércia na seção 2.11)

y = distância da linha neutra até o ponto considerado

Os valores das tensões normais máximas (σ_c e σ_t) ocorrem nas fibras mais afastadas em relação à linha neutra (LN), como indicado na figura 2.51.

Figura 2.51

Exemplo de carregamento e tensões máximas.



Temos, então:

$$\sigma_t = \frac{M}{I} \cdot y_1 = \frac{M}{\frac{I}{y_1}} = \frac{M}{W_1} \quad \text{e} \quad \sigma_c = \frac{M}{I} \cdot y_2 = \frac{M}{\frac{I}{y_2}} = \frac{M}{W_2}$$

2.7.3 Tensões de cisalhamento na flexão

Nas vigas solicitadas à força cortante (Q) aparecem **tensões de cisalhamento** (τ) nas seções transversais e longitudinais. A tensão de cisalhamento que atua na fibra que dista y da linha neutra é dada pela expressão

$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I}, \text{ em que:}$$

Q = força cortante

M_s = momento estático

I = momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra (LN)

2.7.4 Dimensionamento de vigas

No dimensionamento, limitam-se as tensões atuantes em relação a tensões admissíveis (σ_{adm} e τ_{adm}).

$$\sigma = \frac{M}{W} \leq \sigma_{adm} \quad \tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I} \leq \tau_{adm}$$

em que:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{k_s} \quad \tau_{adm} = \frac{\tau_e}{k_s}$$

Como na maioria das aplicações a tensão de cisalhamento é desprezível em relação à tensão normal, para efeito de cálculo será considerada apenas a flexão pura.

Exemplos

1. Uma barra de aço ABNT 1040, engastada em uma das extremidades conforme indicado na figura 2.52, deverá suportar uma carga estática de 1 000 N concentrada na extremidade livre. Sabendo que seu comprimento é de 200 mm, calcular as tensões normal e de cisalhamento máximas.

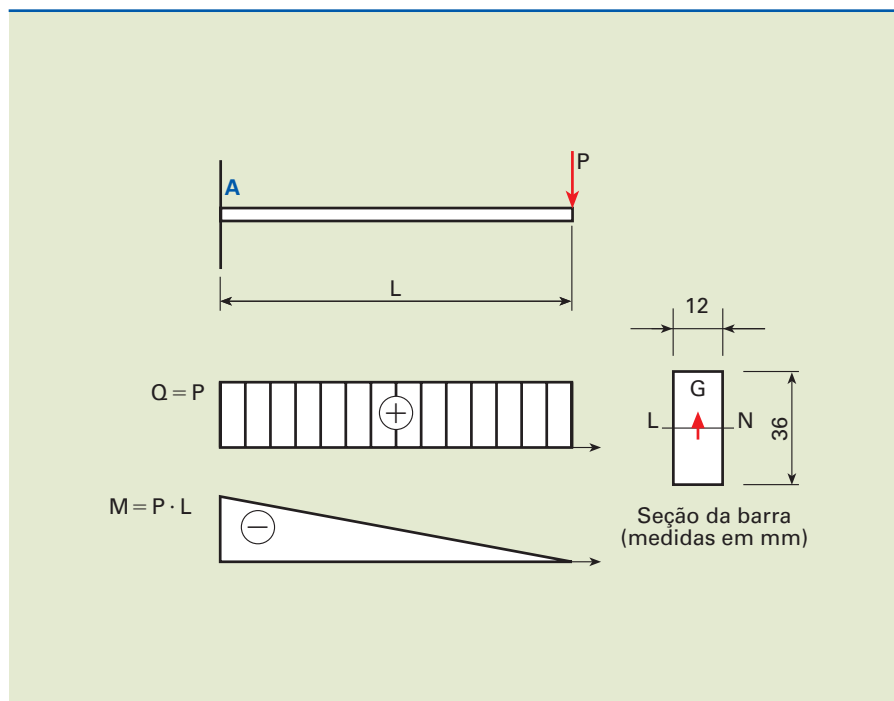


Figura 2.52

Esboço do exemplo 1.

Solução

$$\text{As fórmulas das tensões são: } \sigma = \frac{M}{W} \text{ e } \tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot l}$$

$$M = P \cdot L = 1000 \cdot 200 = 200\,000 \text{ N} \cdot \text{mm} = 2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \Rightarrow I = \frac{12 \cdot 36^3}{12} \Rightarrow I = 46\,656 \text{ mm}^4$$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} \Rightarrow W = \frac{12 \cdot 36^2}{6} \Rightarrow W = 2\,592 \text{ mm}^3$$

$$M_s = 12 \cdot 18 \cdot 9 = 1944 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{2 \cdot 10^5}{2\,592} = 77,2 \text{ e } \tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot l} = \frac{1000 \cdot 1944}{12 \cdot 46\,656} = 3,5$$

Portanto, os valores das tensões são de:

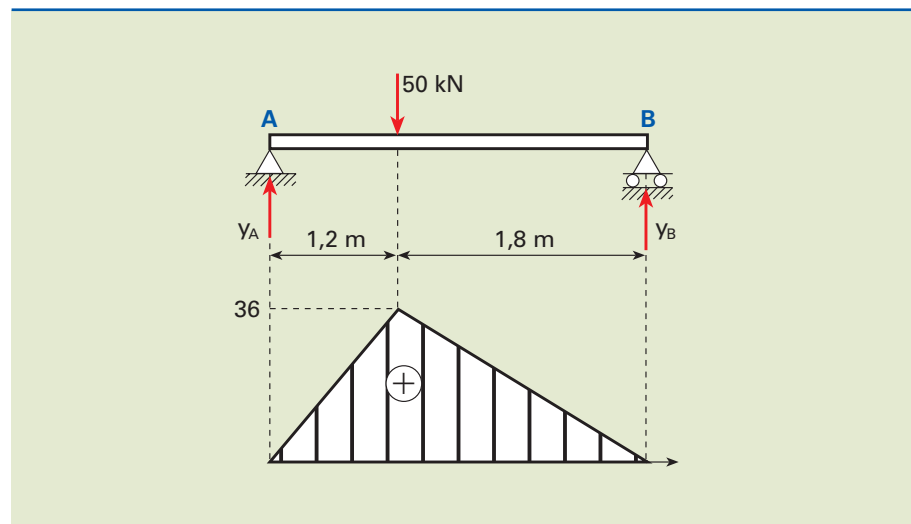
$$\sigma = 77,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ e } \tau = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

O valor da tensão normal (σ) é bem maior que a tensão de cisalhamento (τ).

2. Determinar as dimensões da viga de aço ABNT 1020 perfil I, no carregamento proposto na figura 2.53.

$$\text{Dado: } \sigma_{\text{adm}} = 8,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Figura 2.53
Esboço do exemplo 2.



Solução

Reações de apoio:

$$1) \sum F_y = 0 \Rightarrow y_A + y_B = 50$$

$$2) \sum M_A = 0 \Rightarrow -50 \cdot 1,2 + y_B \cdot 3 = 0 \Rightarrow y_B \cdot 3 = 60 \Rightarrow y_B = 20 \text{ kN}$$

$$y_A = 50 - y_B = 50 - 20 \Rightarrow y_A = 30 \text{ kN}$$

O momento fletor máximo ocorre a 1,2 m do apoio A e seu valor é:

$$M = 36 \cdot 1,2 = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como foi visto, para dimensionar uma viga devemos impor:

$$\sigma = \frac{M}{W} \leq \sigma_{\text{adm}} \Rightarrow W \geq \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$W \geq \frac{36 \cdot 10^2}{8,4} \approx 428,6$$

Portanto: $W \geq 428,6 \text{ cm}^3$

Com o módulo de resistência (W) calculado, consultando a tabela 2.2 na qual constam os valores de W , escolhemos uma seção com valor W um pouco superior.

Tabelas semelhantes à tabela 2.2 são encontradas em manuais, livros e, principalmente, em catálogos de fabricantes.

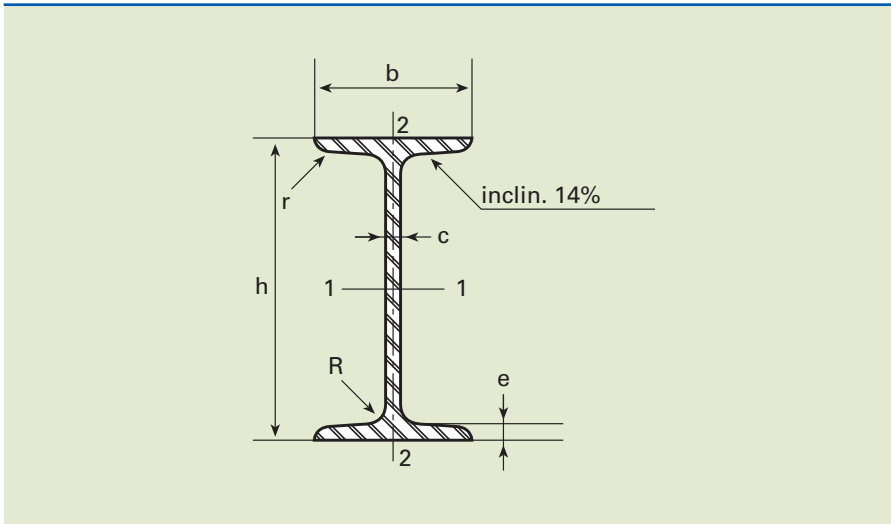
No caso analisado, a viga I escolhida possui $W = 442 \text{ cm}^3$, com dimensões $b = 113 \text{ mm}$, $h = 260 \text{ mm}$ e $c = 9,4 \text{ mm}$.

| Perfil | Dimensões (mm) | | | | | | Seção cm ² | Peso kg/m | Eixo 1-1 | | | Eixo 2-2 | | |
|--------|----------------|-----|------|------|------|------|--------------------------|--------------|----------------------|----------------------|---------|----------------------|----------------------|---------|
| | h | b | c | e | R | R | | | J cm ⁴ | W cm ³ | ρ cm | J cm ⁴ | W cm ³ | ρ cm |
| 8 | 80 | 42 | 3,9 | 5,9 | 3,9 | 2,3 | 7,58 | 5,95 | 77,8 | 19,5 | 3,20 | 6,29 | 3,00 | 0,91 |
| 10 | 100 | 50 | 4,5 | 6,8 | 4,5 | 2,7 | 10,6 | 8,32 | 171 | 34,2 | 4,01 | 12,2 | 4,88 | 1,07 |
| 12 | 120 | 58 | 5,1 | 7,7 | 5,1 | 3,1 | 14,2 | 11,2 | 328 | 54,7 | 4,81 | 21,5 | 7,41 | 1,23 |
| 14 | 140 | 66 | 5,7 | 8,6 | 5,7 | 3,4 | 17,3 | 14,4 | 573 | 81,9 | 5,61 | 35,2 | 10,7 | 1,40 |
| 16 | 160 | 74 | 6,3 | 9,5 | 6,3 | 3,8 | 22,8 | 17,9 | 935 | 117 | 6,40 | 54,7 | 14,8 | 1,55 |
| 18 | 180 | 82 | 6,9 | 10,4 | 6,9 | 4,1 | 27,9 | 21,9 | 1450 | 161 | 7,20 | 81,3 | 19,8 | 1,71 |
| 20 | 200 | 90 | 7,5 | 11,3 | 7,5 | 4,5 | 33,5 | 26,3 | 2140 | 214 | 8,00 | 117 | 26,0 | 1,87 |
| 22 | 220 | 98 | 8,1 | 12,2 | 8,1 | 4,9 | 39,6 | 31,1 | 3060 | 278 | 8,80 | 162 | 33,1 | 2,02 |
| 24 | 240 | 106 | 8,7 | 13,1 | 8,7 | 5,2 | 46,1 | 36,2 | 4250 | 354 | 9,59 | 221 | 41,7 | 2,20 |
| 26 | 260 | 113 | 9,4 | 14,1 | 9,4 | 5,6 | 53,4 | 41,9 | 5740 | 442 | 10,4 | 288 | 41,0 | 2,32 |
| 28 | 280 | 119 | 10,1 | 15,2 | 10,1 | 6,1 | 61,1 | 48,0 | 7590 | 542 | 11,1 | 364 | 61,2 | 2,45 |
| 30 | 300 | 125 | 10,8 | 16,2 | 10,8 | 6,5 | 69,1 | 54,2 | 9800 | 653 | 11,9 | 451 | 72,2 | 2,56 |
| 32 | 320 | 131 | 11,5 | 17,3 | 11,5 | 6,9 | 77,8 | 61,1 | 12510 | 782 | 12,7 | 555 | 84,7 | 2,67 |
| 34 | 340 | 137 | 12,2 | 18,3 | 12,2 | 9,3 | 86,8 | 68,1 | 15700 | 927 | 13,5 | 674 | 98,4 | 2,80 |
| 36 | 360 | 143 | 13,0 | 19,5 | 13,0 | 7,8 | 97,1 | 76,2 | 19610 | 1090 | 14,2 | 818 | 114 | 2,90 |
| 38 | 380 | 149 | 13,7 | 20,5 | 13,7 | 8,2 | 107 | 84,0 | 24010 | 1260 | 15,0 | 975 | 131 | 3,02 |
| 40 | 400 | 155 | 14,4 | 21,6 | 14,4 | 8,6 | 118 | 92,6 | 29210 | 1460 | 15,7 | 1160 | 149 | 3,13 |
| 42,5 | 425 | 163 | 15,3 | 23,0 | 15,3 | 9,2 | 132 | 104 | 36970 | 1740 | 16,7 | 1440 | 176 | 3,30 |
| 45 | 450 | 170 | 16,2 | 24,3 | 16,2 | 9,7 | 147 | 115 | 45850 | 2040 | 17,1 | 1730 | 203 | 3,43 |
| 47,5 | 475 | 178 | 17,1 | 25,6 | 17,1 | 10,3 | 163 | 128 | 36480 | 2380 | 18,6 | 2090 | 235 | 3,60 |
| 50 | 500 | 185 | 18,0 | 27,0 | 18,0 | 10,8 | 180 | 141 | 68740 | 2750 | 19,6 | 2480 | 268 | 3,72 |
| 55 | 550 | 200 | 19,0 | 30,0 | 19,0 | 11,9 | 213 | 167 | 99180 | 3610 | 21,4 | 3490 | 349 | 4,02 |
| 60 | 600 | 215 | 21,6 | 32,4 | 21,6 | 13,0 | 254 | 199 | 139000 | 4630 | 23,4 | 4670 | 434 | 4,30 |

Tabela 2.2

Propriedades e geometria
para vigas de perfil I.



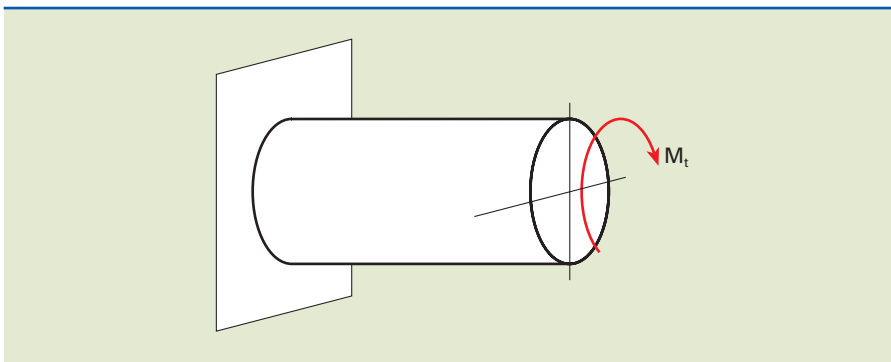
**Figura 2.54**

Dimensões do perfil I.

2.8 Torção simples

2.8.1 Barras de seção circular

Quando o único esforço que solicita a barra é um momento torçor no plano da seção transversal, diz-se que a sollicitação é de **torção simples**. Um exemplo de torção simples pode ser representado por uma viga engastada solicitada por um momento torçor, como indicado na figura 2.55.

**Figura 2.55**

Viga em balanço solicitada por um momento torçor.

As tensões que esse momento torçor provoca nas seções transversais são de **cisalhamento** (τ). O problema, então, consiste em determinar uma expressão que nos forneça essa tensão para qualquer ponto da seção transversal em função do momento torçor (M_t).

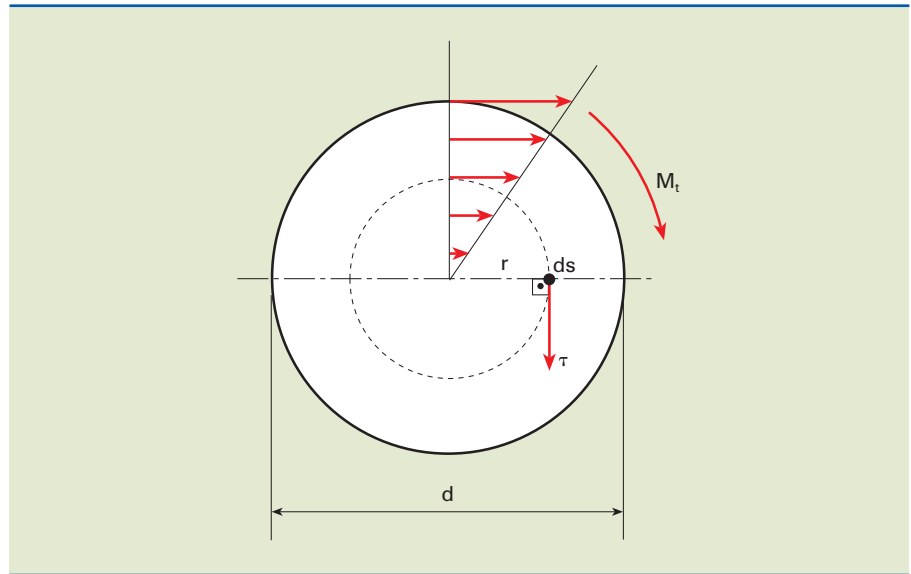
Vamos considerar uma barra de seção transversal circular constante, submetida ao momento de torção M_t , como mostra a figura 2.56. São admitidas as seguintes hipóteses:

- 1) As seções transversais permanecem planas durante a deformação.
- 2) A tensão atuante é perpendicular ao raio r .

3) A variação da tensão ao longo do raio é linear ($\tau = k \cdot r$).

Figura 2.56

Seção transversal de uma barra solicitada por um momento torçor.



Para que haja equilíbrio, é necessário que a soma dos momentos dos esforços que atuam em toda a seção transversal em relação ao centro de gravidade seja igual ao momento torçor (M_t).

Deduz-se que a tensão de cisalhamento em um ponto qualquer da seção é dada pela expressão:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \text{ em que:}$$

τ = tensão de cisalhamento no ponto de raio r

M_t = momento torçor ou torque

I_p = momento polar de inércia

Dedução da expressão para a tensão de cisalhamento

A tensão de cisalhamento τ poderia ser obtida com algum conhecimento de cálculo integral simples, como mostramos na dedução a título de curiosidade.

$$M_t = \int_{(S)} r \cdot dF$$

Porém, sabemos que: $\tau = \frac{dF}{dS}$

Nessa condição foi visto que a tensão de cisalhamento (τ) é uma função linear e dependente apenas do raio (r).

Substituindo na equação integral do momento torçor, temos:

$$M_t = \int_{(S)} r \cdot dF = \int_{(S)} r \cdot \tau \cdot dS = \int_{(S)} r^2 \cdot k \cdot dS$$

Como: $S = \pi \cdot r^2 \rightarrow dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$

dessa forma: $M_t = \int_{(r)} k \cdot r^2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = 2 \cdot k \cdot \pi \int_{(r)} r^3 \cdot dr = k \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2}$

Foi visto que o momento polar de inércia (I_p) é uma grandeza que depende apenas das características geométricas da seção transversal. Para uma seção circular, temos:

$$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

Concluimos que: $M_t = kI_p \Rightarrow k = \frac{M_t}{I_p}$

Substituindo na hipótese 3, temos: $\tau = kr = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \therefore \tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$ (I)

A tensão máxima de cisalhamento ocorre quando $r = \frac{d}{2}$. Substituindo na

expressão (I), obtemos: $\tau_{m\text{ax}} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_t}{W_t}$ em que:

$$W_t = \text{módulo de resistência à torção } W_t = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2 \cdot d^3$$

No dimensionamento, devemos impor: $\tau_{m\text{ax}} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{\text{adm}}$

No cálculo, adotaremos:

$$\tau_e = 0,6 \cdot \sigma_e \text{ e } \tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_e}{k_s}, \text{ em que:}$$

τ = tensão de escoamento ao cisalhamento

τ_{adm} = tensão admissível ao cisalhamento

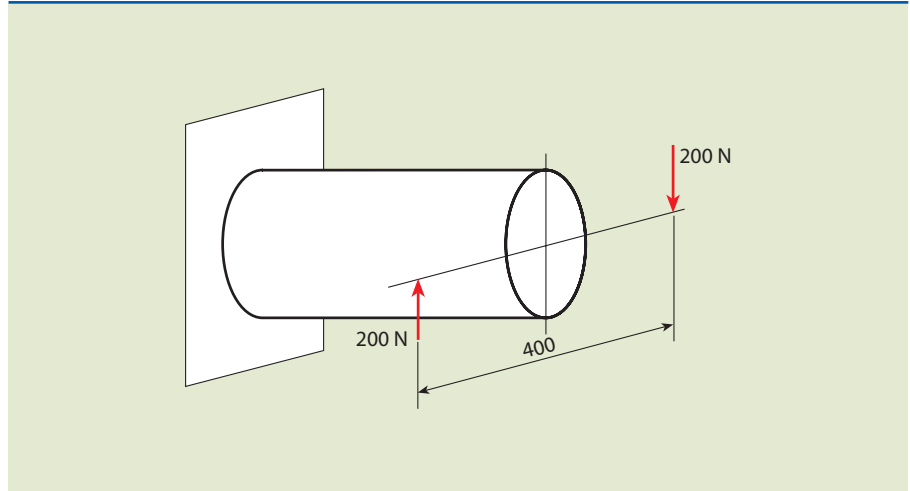
k_s = coeficiente de segurança

Exemplo

Dada uma barra de seção circular, solicitada conforme indicado na figura 2.57, determinar o valor do diâmetro para que resista ao momento gerado pelo binário de intensidade igual a 200 N.

Figura 2.57

Barra de seção circular solicitada por um binário.



$$\text{Dados: } \sigma_e = 400 \text{ MPa; } k_s = 6; 1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Solução

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{\text{adm}}$$

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_e}{k_s} = \frac{0,6 \cdot \sigma_e}{k_s} = \frac{0,6 \cdot 400}{6} = 40 \text{ MPa}$$

$$M_t = F \cdot 400 = 80\,000 = 8 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

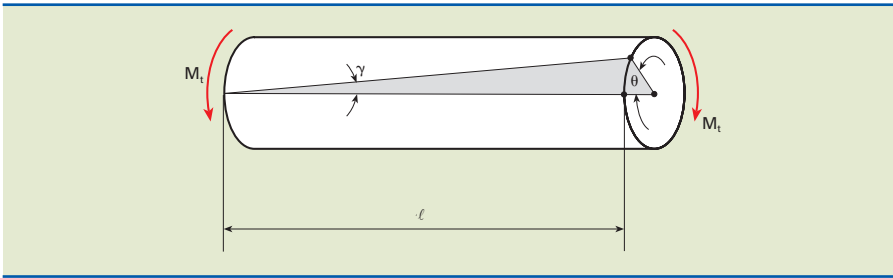
$$\frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{\text{adm}} \Rightarrow W_t \geq \frac{M_t}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{8 \cdot 10^4}{40} = 2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \otimes$$

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} \geq 2 \cdot 10^3 \Rightarrow d^3 \geq \frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{\pi} \Rightarrow d \geq 21,7 \text{ mm}$$

2.8.2 Ângulo de torção

O deslocamento angular (θ) devido à aplicação de um momento torçor (M_t), conforme ilustrado na figura 2.58, é determinado por:

$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_p} \quad (\theta \text{ em radianos})$$

**Figura 2.58**

Rotação devida ao momento torçor:

em que **G** é o módulo transversal de elasticidade, ou módulo de rigidez.

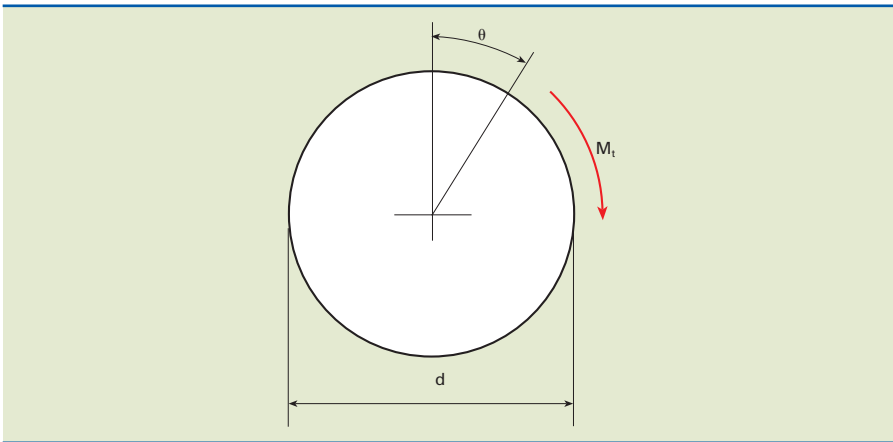
O valor de **G** é uma característica do material e consta em tabelas de livros e de manuais.

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}; \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \dots \right)$$

γ = deformação de cisalhamento

Exemplo

Para o eixo indicado na figura 2.59, determinar a tensão máxima de cisalhamento e o ângulo de torção correspondente a 1 m de comprimento.

**Figura 2.59**

Exemplo proposto para ângulo de torção.

Dados:

$$d = 50 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$M_1 = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$G = 84 \text{ GPa}$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \frac{\pi \cdot 625 \cdot 10^{-8}}{32} = 61,36 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

A tensão máxima é dada pela expressão:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{1000 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{61,36 \cdot 10^{-8}} = \frac{25 \cdot 10^8}{61,36} = 40,7 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\therefore \tau_{\text{máx}} = 40,7 \text{ MPa ou } \tau_{\text{máx}} = 40,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

O ângulo de torção (θ) pode ser determinado por: $\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_p}$

$$\theta = \frac{10^3 \cdot 1}{84 \cdot 10^9 \cdot 61,36 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^3}{84 \cdot 61,36 \cdot 10} = 0,0194 \text{ rad}$$

$$\theta = 0,0194 \text{ rad} \Rightarrow \theta = 1^\circ 7'$$

2.8.3 Fórmula do torque em função da potência e da rotação

Em muitas aplicações mecânicas, conhecemos a potência em quilowatts (kW) e a frequência em rotações por minuto (rpm) que atuam nos elementos de máquinas.

Para determinarmos o torque, partimos da definição da potência (N) (não confundir com o símbolo de força N de newton).

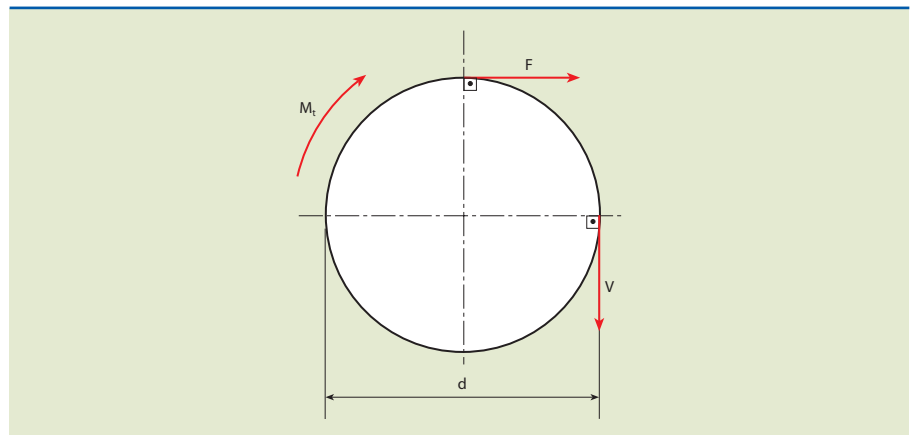
$$N = \frac{\text{trabalho}}{\text{tempo}} = \frac{F \cdot S}{t} = F \cdot V \Rightarrow N = F \cdot V \text{ (W)} \quad (\text{I})$$

em que: F = força (N) e V = velocidade $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

A unidade de potência é: $\frac{\text{newton} \cdot \text{metro}}{\text{segundo}} = \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \text{watt}$

Da transmissão em eixos circulares, como indicado na figura 2.60, temos:

Figura 2.60
Transmissão em eixos circulares.



- Força tangencial (F)

$$M_t = F \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow F = \frac{2M_t}{d} \text{ (N)} \quad \text{(II)}$$

- Velocidade tangencial (V)

$$V = \frac{\pi d}{T} = \pi d n \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \text{ ou } V = \frac{\pi d n}{60} \left(\frac{\text{m}}{\text{min}} \right) \quad \text{(III)}$$

em que: $n = \frac{1}{T}$ é a rotação em rpm, e $T =$ período.

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$N = \frac{2M_t}{d} \cdot \frac{\pi d n}{60} = \frac{\pi M_t}{30} \Rightarrow M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n} = 9,55 \frac{N}{n}$$

$$\therefore M_t = 9,55 \cdot \frac{N}{n}$$

em que: $M_t =$ torque (em $\text{N} \cdot \text{m}$), $N =$ potência (em W), $n =$ rotação (em rpm).

Se a potência for dada em quilowatt (kW), a fórmula passa a ser de:

$$M_t = 9\,550 \cdot \frac{N}{n}$$

com, $N =$ potência (kW), $n =$ frequência (rpm) e $M_t =$ torque ($\text{N} \cdot \text{m}$)

Exemplo

Determinar o diâmetro do núcleo do eixo de um motor elétrico, conforme indicado na figura 2.61, para uma transmissão direta (somente com torque).

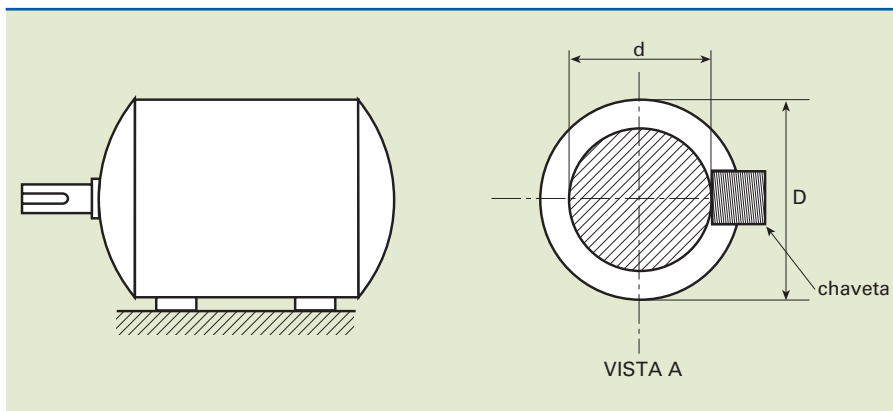


Figura 2.61

Exemplo de transmissão de potência.

Dados: $N = 20 \text{ hp}$, $n = 1\,160 \text{ rpm}$, $\tau_{\text{adm}} = 50 \text{ MPa}$, e $1 \text{ hp} = 0,746 \text{ kW}$

Solução

$$N = 20 \cdot 0,746 = 14,92 \text{ kW}$$

$$M_t = 9\,550 \frac{N}{n} = 9\,550 \cdot \frac{14,92}{1\,160} = 122,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{\text{adm}} \Rightarrow W_t \geq \frac{M_t}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{122,8 \cdot 10^3}{50} \Rightarrow W_t \geq 2\,456 \text{ mm}^3$$

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} \geq 2\,456 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{162\,456}{\pi}} \Rightarrow d \geq 23,2 \text{ mm}$$

2.9 Flexo-torção

Até o momento, os carregamentos discutidos consideravam efeitos não combinados, eram apenas de tração, flexão ou torção, promovendo assim apenas um único tipo de tensão. Em situações mais realistas, no entanto, há necessidade de combiná-los.

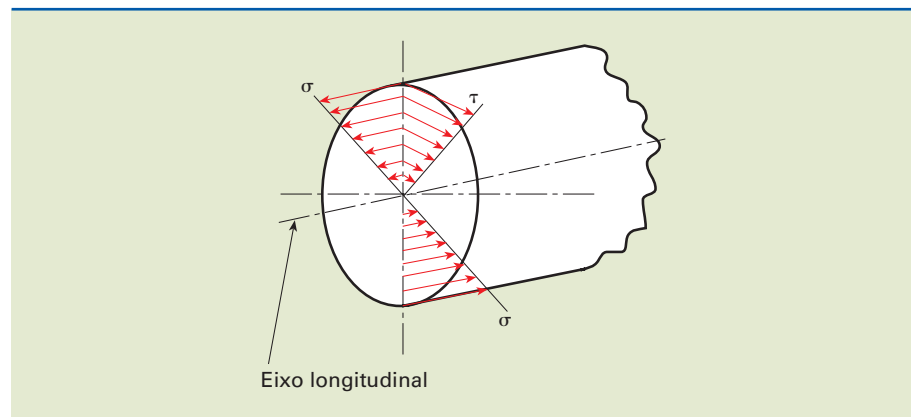
O estudo a ser desenvolvido será efetuado para barras de seção transversal circular constante, de materiais que apresentam comportamento dúctil, solicitados simultaneamente à flexão e à torção e em condição de equilíbrio estático.

2.9.1 Tensão ideal

Sabemos que em uma seção transversal de um eixo quando solicitado por um momento fletor (M) e por um momento torçor (M_t) ocorrem, respectivamente, tensões normais (σ) e tensões de cisalhamento (τ), representadas de forma esquemática na figura 2.62.

As tensões σ e τ variam proporcionalmente com o raio e são nulas no centro do eixo.

Figura 2.62
Flexo-torção para uma barra de seção circular constante.



Os valores máximos dessas tensões se localizam no contorno da seção e valem:

$$\sigma = \frac{M}{W} \text{ e } \tau = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\text{em que: } W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 \text{ e } W_t = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3$$

Como as tensões normais (σ) atuam no plano que passa pelo eixo longitudinal e as tensões de cisalhamento (τ) no plano transversal perpendicular a esse eixo e não podem simplesmente ser somadas, portanto, devemos recorrer a alguns critérios consagrados da resistência dos materiais.

Escolhemos o critério da teoria da maior energia de Von Mises, em que:

$$1) \sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm},$$

e a teoria do maior alongamento de Bach, em que:

$$2) \sigma_i = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

Essa tensão ideal (σ_i) pode ser interpretada como tensão capaz de produzir o mesmo efeito que a soma da tensão normal (σ) e da tensão de cisalhamento (τ), agindo simultaneamente na seção transversal da barra, como se fosse submetida a uma flexão simples.

2.9.2 Cálculo do diâmetro do eixo

Como há dois critérios diferentes para o dimensionamento de eixos, são esperados como resultado disso valores ligeiramente diferentes de ambos os métodos. Dessa forma, desenvolvendo o critério de Von Mises, obtemos:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_{adm}^2$$

$$\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2 \leq \sigma_{adm}^2$$

Substituindo, $W = 0,1 \cdot d^3$ e $W_t = 0,2 \cdot d^3$, temos:

$$\left(\frac{M}{0,1 \cdot d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{0,2 \cdot d^3}\right)^2 \leq \sigma_{adm}^2$$

$$\left(\frac{10^2 M^2}{d^6}\right) + \left(\frac{10^2 \cdot M_t^2}{d^6}\right)^2 \leq \sigma_{adm}^2 \Rightarrow d \geq \sqrt[6]{\frac{10^2 (M^2 + M_t^2)}{\sigma_{adm}^2}}$$

O valor de d é o diâmetro da barra solicitada à flexão-torção.

Desenvolvendo o critério de Bach, obtemos outra equação para a determinação do diâmetro.

$$\sigma_i = 0,35 \cdot \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

$$0,35 \cdot \frac{M}{0,1d^3} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{M}{0,1d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{0,2d^3}\right)^2} \leq \sigma_{adm}$$

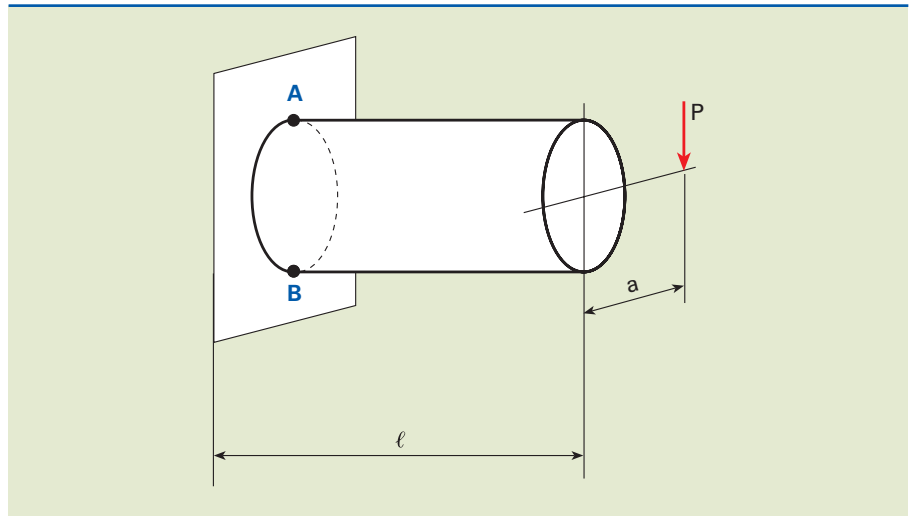
$$\frac{3,5M}{d^3} + 0,65 \sqrt{\frac{10^2 M^2}{d^6} + \frac{4 \cdot 10^2 \cdot M_t^2}{4d^6}} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{3,5M}{d^3} + 6,5 \frac{\sqrt{M^2 + M_t^2}}{d^3} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{3,5M + 6,5\sqrt{M^2 + M_t^2}}{\sigma_{adm}}}$$

Exemplo

Dada uma barra cilíndrica, solicitada conforme o carregamento da figura 2.63, determinar seu diâmetro utilizando os critérios de Von Mises e Bach.

Figura 2.63
Estrutura sob ação
de flexo-torção.



Dados: $P = 2000 \text{ N}$, $a = 240 \text{ mm}$, $\ell = 400 \text{ mm}$ e $\sigma = 40 \text{ MPa}$.

Solução

A seção que possui maior solicitação é o engastamento, local onde se observa o maior momento fletor, uma vez que o momento torçor e a cortante são constantes para todo o elemento.

O efeito da força cortante não é considerado, em razão de seu valor ser desprezível em relação aos dos momentos fletor e torçor.

$$M = P \cdot \ell = 2000 \cdot 400 = 8 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_t = P \cdot a = 2000 \cdot 240 = 4,8 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

As tensões máximas ocorrem nos pontos A e B, e os valores dos diâmetros calculados pelos critérios 1 e 2 valem, respectivamente, 61,5 mm e 60,5 mm, após aplicação das equações, substituindo os valores de M e M_t . Assim

$$\text{Critério 1} \Rightarrow d \geq \sqrt[6]{\frac{10^2 \left[(8 \cdot 10^5)^2 + (4,8 \cdot 10^5)^2 \right]}{40^2}} \Rightarrow d \geq 61,5 \text{ mm}$$

$$\text{Critério 2} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{3,5 \cdot 8 \cdot 10^5 + 6,5 \sqrt{(8 \cdot 10^5)^2 + (4,8 \cdot 10^5)^2}}{40}} \Rightarrow d \geq 60,5 \text{ mm}$$

2.10 Flambagem

Uma coluna ou barra submetida a uma força axial de compressão (P) pode, em virtude desse carregamento, permanecer reta ou curvar-se lateralmente. Se permanecer reta, é considerada um corpo carregado sofrendo esforços de compressão. Ao fenômeno produzido pela passagem de uma para a outra forma em equilíbrio dá-se o nome de flambagem.

Barras esbeltas (finas e compridas), solicitadas à compressão, sofrem colapso quase ao mesmo tempo em que se atinge a carga limite de flambagem, fato que se deve à sobreposição de esforços internos.

Por exemplo, o aumento de 1% acima da carga crítica de flambagem pode provocar um deslocamento relativo à condição inicial (seta f) da ordem de 20% de seu comprimento total (ℓ), esquematicamente indicado na figura 2.64. Ou seja:

$$P = 1,01 P_f \Rightarrow f \simeq 0,2 \ell$$

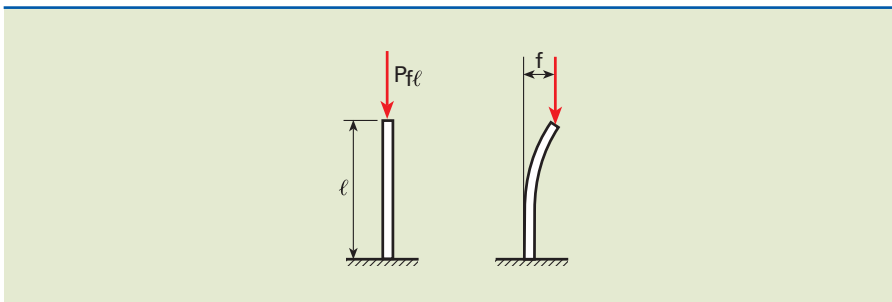


Figura 2.64

Indicação de deslocamento devido à flambagem.

2.10.1 Carga de flambagem

Denomina-se **carga de flambagem** (P_f), ou carga crítica, a carga axial aplicada a uma barra esbelta que faz a barra deixar de ser estável (reta) e curvar-se lateralmente.

A carga de flambagem (P_f) para uma barra prismática, no regime elástico, é dada pela expressão conhecida como fórmula de Euler.

$$P_f = \frac{\pi}{l_f^2} \cdot E \cdot I \quad \text{em que:}$$

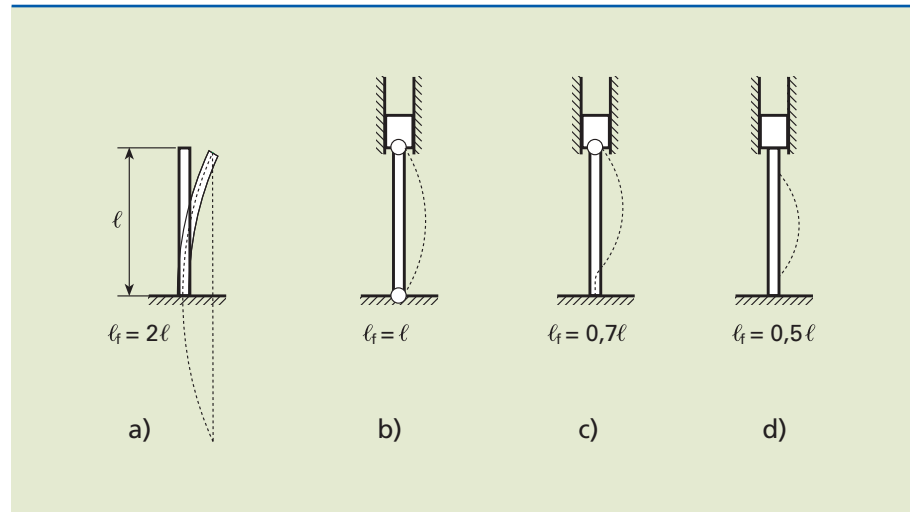
P_f = carga de flambagem, E = módulo de elasticidade,
 I = momento de inércia mínimo, e l_f = comprimento de flambagem

O valor do comprimento de flambagem (l_f) depende de como as barras são apoiadas nas extremidades. A figura 2.65 indica condições possíveis de deslocamentos para barras esbeltas sob compressão. A figura 2.65a mostra esquematicamente o perfil de deslocamento para uma condição em que a barra é fixa em uma extremidade e livre na outra. Os demais perfis de deslocamento para diferentes tipos de apoio estão representados nos esquemas *b*, *c* e *d* da figura 2.65.

Figura 2.65

Perfis de deslocamento para um carregamento axial de compressão:

- a) viga em balanço;
- b) viga biarticulada com guia;
- c) viga engastada em uma das extremidades e articulada na região com guia;
- d) viga sem articulação com guia na região móvel.



2.10.2 Tensão de flambagem

No instante que precede a flambagem, a tensão de flambagem (σ_f) é dada por:

$$\sigma_f = \frac{P_f}{S} \quad (I)$$

em que: S = área da seção.

Sabendo que $P_f = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_f^2}$ e substituindo em (I), temos:

$$\sigma_f = \frac{P_f}{S} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_f^2 \cdot S} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l_f^2} \left(\frac{I}{S} \right) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I^2}{l_f^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_f}{i} \right)^2}$$

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

em que:

$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ i : raio de giração mínimo da seção transversal

$\lambda = \frac{l_f}{i}$ λ : índice ou grau de esbeltez da barra

A representação gráfica da função $\sigma_{fe} = f(\lambda)$, indicada na figura 2.66, recebe o nome de **curva de flambagem**.

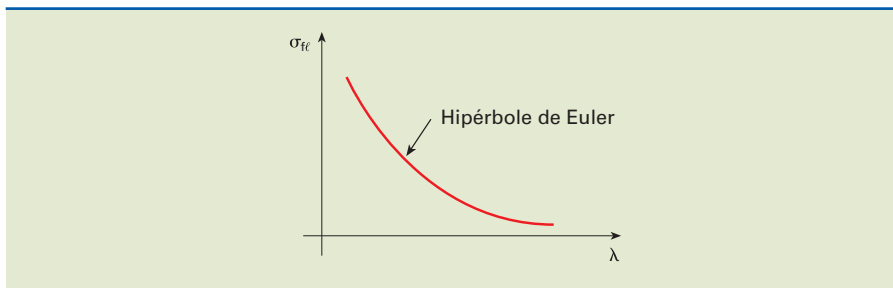


Figura 2.66

Curva de flambagem.

A expressão $\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ é denominada hipérbole de Euler e não é válida para

qualquer valor de λ . Para que esteja no regime elástico, devemos impor:

$$\sigma_{fe} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$

em que: σ_p = tensão de proporcionalidade.

$$\lambda^2 \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} \Rightarrow \lambda \geq \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \lambda_{lim}$$

λ_{lim} = menor valor de λ para o qual é válida a expressão.

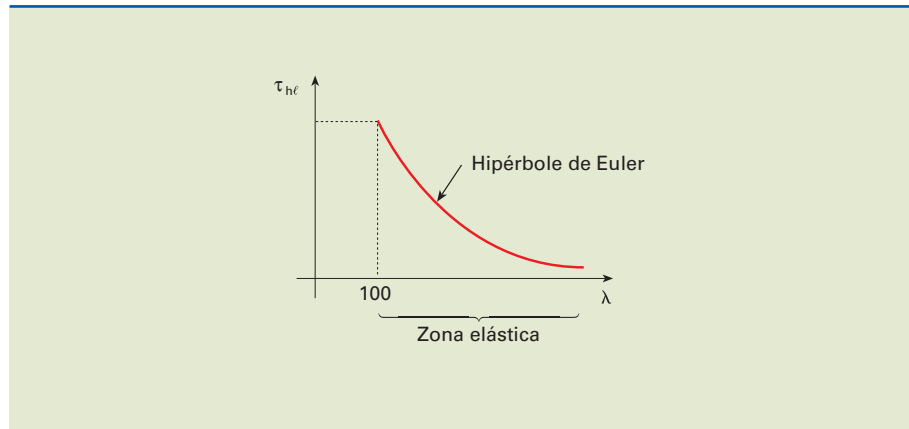
Por exemplo, para o aço com $E = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ e $\sigma_p = 2 \cdot 10^2 \frac{N}{mm^2}$, temos:

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2}} = \pi \cdot 10 \cdot \sqrt{10} \approx 100$$

Portanto, somente para $\lambda \geq 100$ a hipérbole de Euler é aplicável, conforme indicado na figura 2.67.

Figura 2.67

Hipérbole de Euler para determinado tipo de aço.



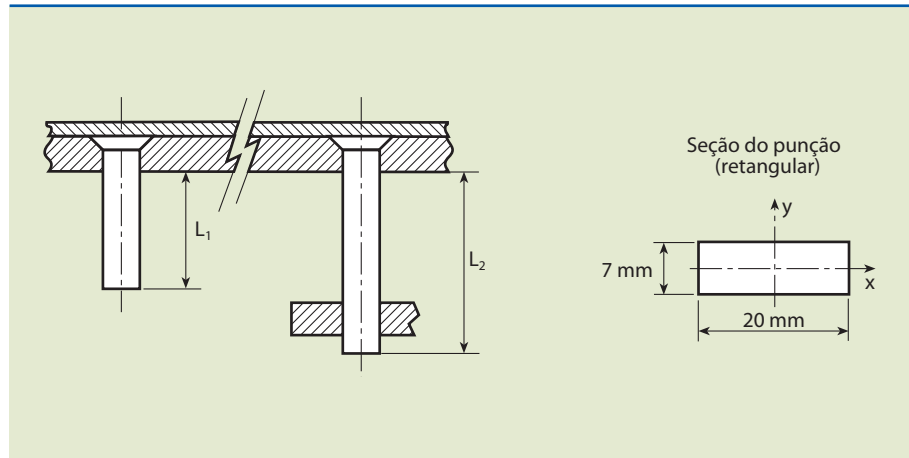
Quando $\lambda \leq \lambda_{lim}$ ou $\sigma_{fl} > \sigma_p$, a flambagem é denominada não elástica.

Exemplo

Determinar o comprimento dos punções para estampar uma chapa de aço SAE 1020, nas condições livre e guiada. Informações adicionais sobre a geometria dos punções são indicadas na figura 2.68.

Figura 2.68

Exemplo de elemento sujeito a flambagem.



Dados: e (espessura da chapa) = 2,5 mm; $E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$; $\tau_{\text{corte}} = 350 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Solução

Na figura 2.68, notamos que os punções possuem suas extremidades engastadas. Dessa forma, as condições para seu dimensionamento são:

Livre $\Rightarrow l_f = 2 l$

Guiada $\Rightarrow l_f = 0,7 l$

A força de corte (F_c) para estampar a chapa é obtida por:

$F_c = \tau_{\text{corte}} \cdot \text{parímetro de corte} \cdot \text{espessura}$

$$F_c = 350 \cdot 2(20 + 7) \cdot 2,5 = 47\,250 \text{ N}$$

$$I = \frac{20 \cdot 7^3}{12} = 571,7 \text{ mm}^4$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_f^2} \Rightarrow l_f^2 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{P_{fl}}$$

$$l_f^2 = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 571,7}{47\,250} \Rightarrow l_f \cong 154 \text{ mm}$$

Portanto, para o punção livre, $l_f = 2L$:

$$l_f = 2 L_1 = 154 \Rightarrow L_1 = \frac{154}{2} \Rightarrow L_1 = 77 \text{ mm}$$

Para o punção guiado, $l_f = 0,7L$:

$$l_f = 0,7 L_2 = 154 \Rightarrow L_2 = \frac{154}{0,7} \Rightarrow L_2 = 220 \text{ mm}$$

2.II Centro de gravidade e momento de inércia

2.II.I Centro de gravidade

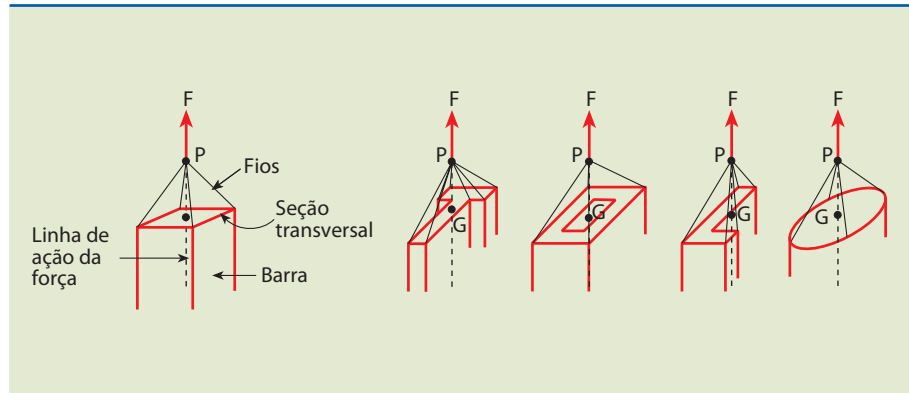
Consideremos uma barra de eixo reto e seção transversal constante. Observamos que a barra pode ser suspensa por fios com movimento apenas de translação, conforme indicado na figura 2.69.

A linha de ação da força F , aplicada no encontro dos fios em P , cruza a seção transversal da barra no ponto G , o qual denominamos **centro de gravidade** ou **baricentro** dessa figura plana, de modo que a barra fique em equilíbrio e em posição vertical.

O ponto G pode estar localizado na própria figura ou fora dela.

Figura 2.69

Exemplo esquemático da obtenção do centro de gravidade.

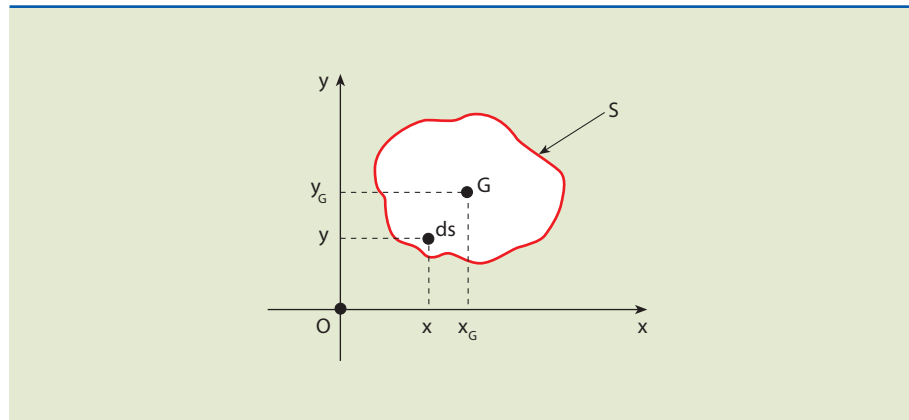


Centro de gravidade de figuras planas

O centro de gravidade (G) de uma figura plana qualquer é localizado pelas coordenadas X_G e Y_G , como mostra a figura 2.70, em que:

Figura 2.70

Obtenção do centro de gravidade para uma figura qualquer.



O teorema de Varignon diz que "o momento de um sistema de forças concorrentes é igual ao momento da força resultante ou igual à soma algébrica dos momentos das componentes".

S = área da figura plana; ds = elemento de área (área elementar); $G = \{X_G; Y_G\}$.

Fazendo analogia com o **teorema de Varignon**, podemos escrever em relação ao eixo X :

$$S \cdot y_G = \int_S ds \cdot y \Rightarrow y_G = \frac{\int_S ds \cdot y}{S} \quad (I)$$

e em relação ao eixo y :

$$S \cdot x_G = \int_S ds \cdot x \Rightarrow x_G = \frac{\int_S ds \cdot x}{S} \quad (\text{II})$$

em que o símbolo \int é chamado integral e significa soma.

Portanto, $\int_S ds \cdot x$

significa a soma do produto de todas as áreas elementares pela correspondente distância ao eixo y e é chamado momento estático em relação ao eixo y (M_y).

Do exposto conclui-se também que o momento estático em relação ao eixo x (M_x) é:

$$M_x = \int_S ds \cdot y$$

Logo, as expressões (I) e (II) podem ser escritas assim:

$$x_G = \frac{M_y}{S} \text{ e } y_G = \frac{M_x}{S} \quad \therefore G = \{x_G; y_G\}$$

O eixo de simetria de uma figura plana contém o baricentro, isto é, o centro de gravidade da figura, como mostra o exemplo da figura 2.71.

Se a figura plana apresenta dois eixos de simetria, seu centro de gravidade é a intersecção desses eixos.

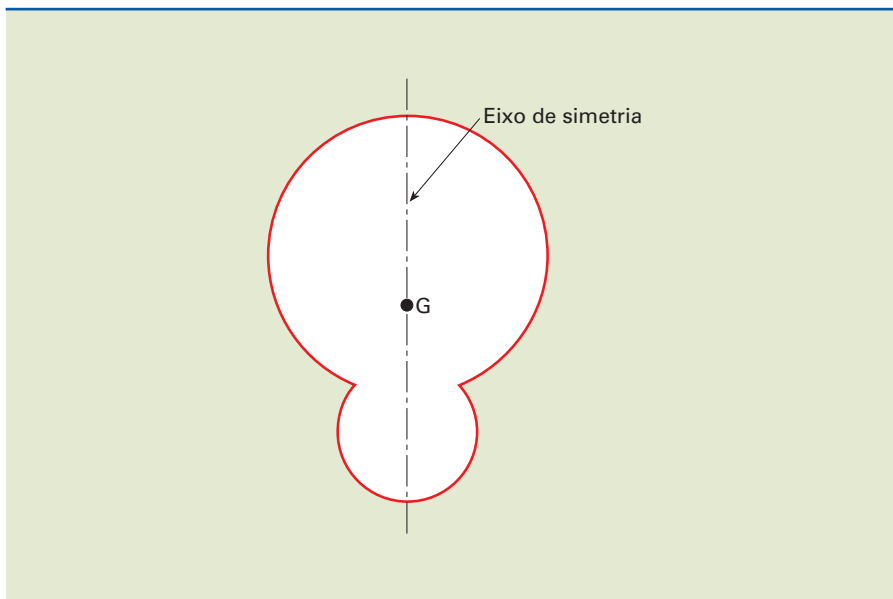


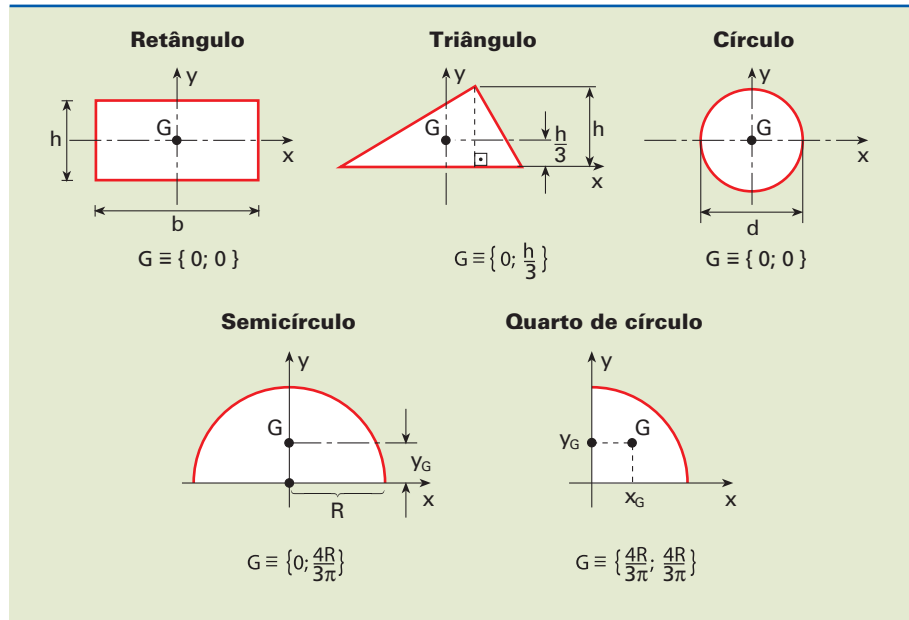
Figura 2.71

Elemento com simetria.

Centro de gravidade de figuras planas simples

O centro de gravidade de figuras planas simples pode ser obtido como mostra a figura 2.72.

Figura 2.72
Centro de gravidade de figuras planas simples.

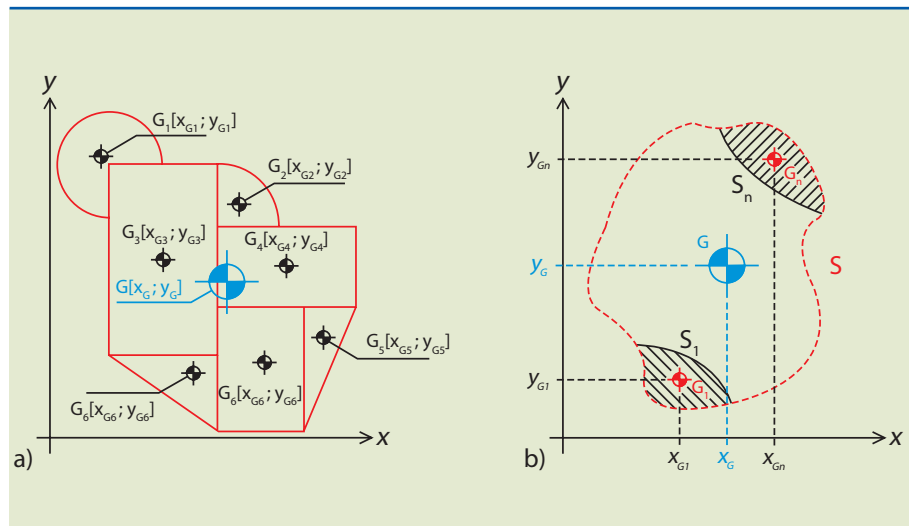


Centro de gravidade de figuras compostas

Em diversas ocasiões, as seções transversais são complexas, entretanto, baseiam-se em figuras planas simples. O esquema *a* da figura 2.73 indica uma figura plana composta por diversas geometrias simples.

De modo geral, para qualquer geometria, o centro de gravidade é igual ao somatório dos produtos da área da figura individual pela respectiva coordenada. O caso generalizado é indicado no esquema *b* da figura 2.73.

Figura 2.73
a) Figura plana composta por diversas geometrias simples;
b) figura plana qualquer.



Dessa forma, dividindo a figura em n partes, as coordenadas do centro de gravidade são:

$$x_G = \frac{S_1 x_{G_1} + S_2 x_{G_2} + \dots + S_n x_n}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \cdot x_{G_i}}{S}$$

$$y_G = \frac{S_1 y_{G_1} + S_2 y_{G_2} + \dots + S_n y_n}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \cdot y_{G_i}}{S}$$

$$\text{em que: } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{i=1}^n S_i$$

Exemplo

Determinar as coordenadas do centro de gravidade da figura 2.74.

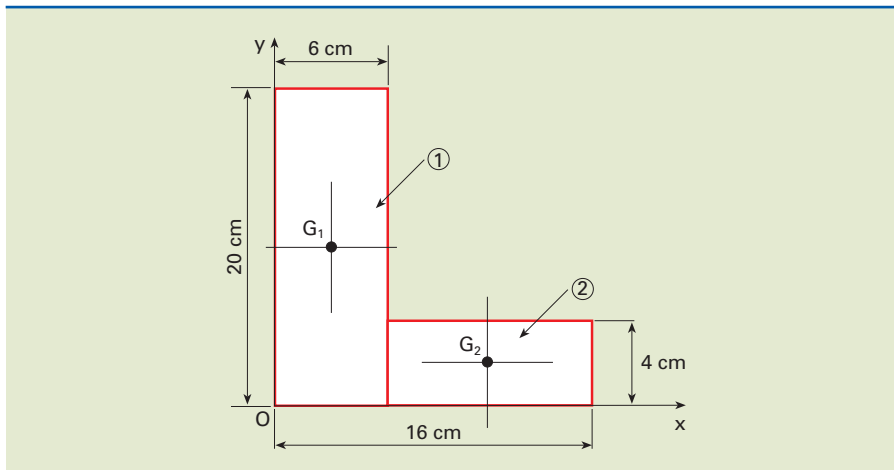


Figura 2.74

Centro de gravidade de figuras compostas.

Solução

Inicialmente, dividimos a figura em dois retângulos 1 e 2. Determinamos, então, o centro de gravidade de cada retângulo (G_1 e G_2). A seguir, aplicamos as fórmulas de determinação do centro de gravidade da figura plana.

$$x_G = \frac{\sum S_i \cdot x_{G_i}}{S} = \frac{S_1 x_{G_1} + S_2 x_{G_2}}{S_1 + S_2} \quad (\text{I})$$

$$y_G = \frac{\sum S_i \cdot y_{G_i}}{S} = \frac{S_1 y_{G_1} + S_2 y_{G_2}}{S_1 + S_2} \quad (\text{II})$$

$$S_1 = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm}^2 \rightarrow x_{G_1} = 3 \text{ cm}; y_{G_1} = 10 \text{ cm}$$

$$S_2 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2 \rightarrow x_{G_2} = 11 \text{ cm}; y_{G_2} = 2 \text{ cm}$$

Substituindo esses valores em (I) e (II), temos:

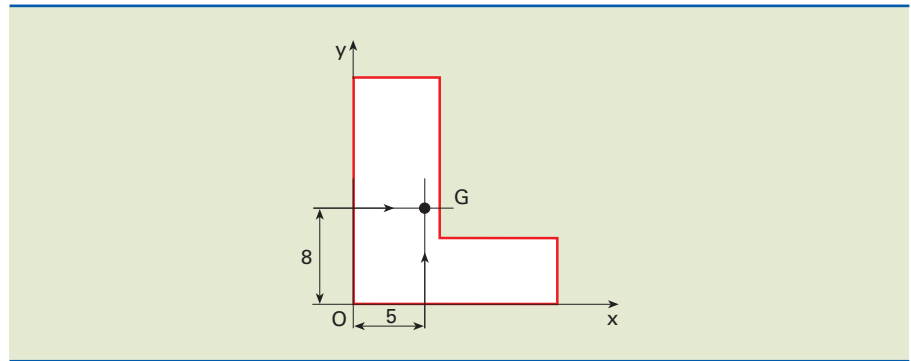
$$x_G = \frac{120 \cdot 3 + 40 \cdot 11}{120 + 40} = \frac{800}{160} = 5$$

$$y_G = \frac{120 \cdot 10 + 40 \cdot 2}{120 + 40} = \frac{1280}{160} = 8$$

Portanto, o centro de gravidade é: $G \{5 \text{ cm}; 8 \text{ cm}\}$, e a localização se faz como mostrado na figura 2.75.

Figura 2.75

Localização do centro de gravidade.



2.11.2 Momento de inércia

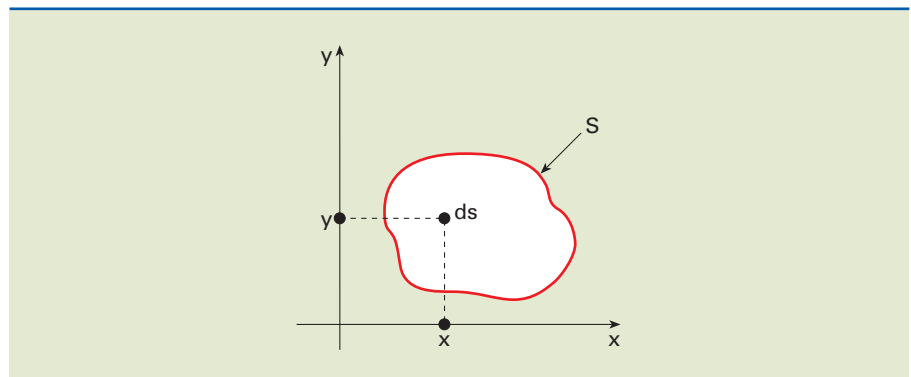
Momento de inércia (I) é uma grandeza escalar. Podemos dizer que é uma propriedade da seção transversal. O momento de inércia de uma figura plana dá uma noção da resistência: quanto maior o momento de inércia, mais resistente é a peça.

Definição do momento de inércia

O momento de inércia de uma superfície de área finita qualquer em relação a um dos eixos do plano, como mostra a figura 2.76, é definido como a integral (somatório) dos momentos de inércia de todos os elementos infinitesimais de área contidos na superfície em relação a esse eixo.

Figura 2.76

Momento de inércia de uma superfície qualquer.



$$I_x = \int_S y^2 \cdot ds$$

$$I_y = \int_S x^2 \cdot ds$$

Observações

- I_x e I_y são grandezas cujo valor numérico é sempre maior ou igual a zero.
- I_x e I_y são grandezas que dependem das características geométricas da seção.
- As unidades de medida de I_x e I_y são as de comprimento elevadas à 4ª potência (m^4 , cm^4 , mm^4 etc.).

Exemplo

Determinar o momento de inércia em relação a um eixo (x_G) que passa pelo centro de gravidade de um retângulo paralelo a sua base, conforme indicado na figura 2.77.

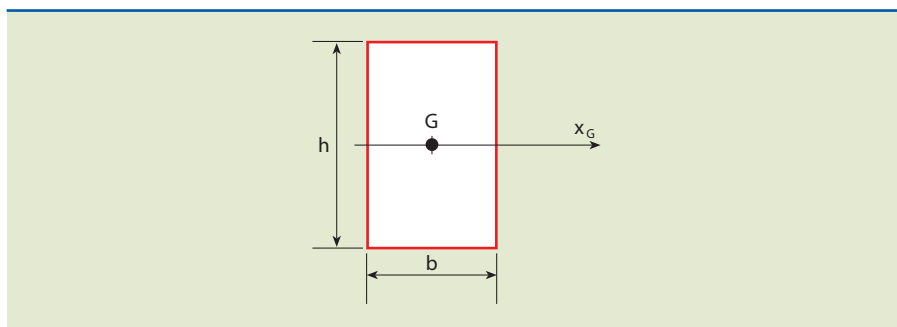


Figura 2.77

Exemplo do momento de inércia.

Dados: $b = 2 \text{ cm}$

$h = 4 \text{ cm}$

Solução

O momento de inércia em relação ao eixo x_G é dado pela equação $I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}$ desta forma:

$$I_{x_G} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} \cong 10,7 \quad \therefore I_{x_G} = 10,7 \text{ cm}^4$$

Momento polar de inércia

O momento polar de inércia é uma grandeza escalar, assim como o momento de inércia, entretanto, possui relação direta com a resistência. Ou seja, quanto maior o momento polar de inércia maior a resistência à torção.

Podemos determinar o momento polar de inércia (I_p) como:

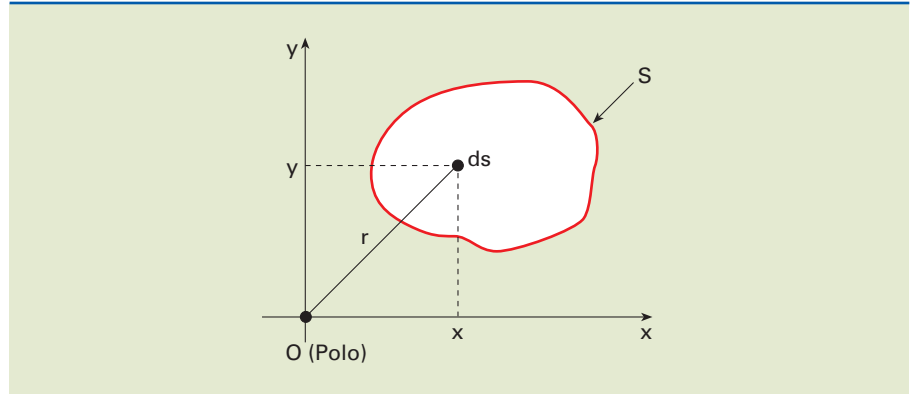
$$I_p = \int_S r^2 \cdot ds$$

em que r é a distância entre o elemento infinitesimal e o polo.

Para uma geometria plana qualquer, podemos observar as dimensões ilustradas na figura 2.78.

Figura 2.78

Geometria plana qualquer.



O momento polar de inércia é a soma de dois momentos de inércia de eixos perpendiculares um ao outro, e que cruzam no polo.

Da figura, temos:

$$I_p = \int_S (x^2 + y^2) ds = \int_S x^2 ds + \int_S y^2 ds$$

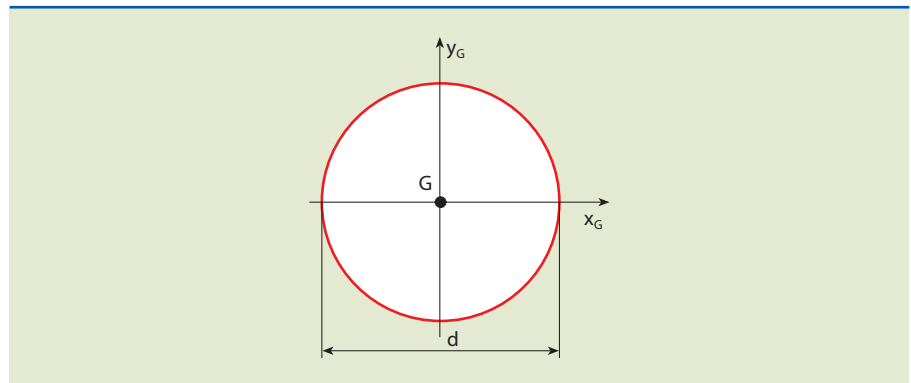
$$\therefore I_p = I_y + I_x$$

Exemplo

Determinar o momento de inércia em relação ao centro de uma seção circular indicada na figura 2.79.

Figura 2.79

Momento polar de inércia.



Solução

Sabendo que os momentos de inércia em relação aos eixos x_G e y_G valem $\frac{\pi d^4}{64}$, vamos aplicar a fórmula:

$$I_P = I_x + I_y = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^4}{64} = \frac{2\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32} \quad \therefore I_P = \frac{\pi d^4}{32}$$

Módulo de resistência

Define-se o **módulo de resistência** (W) de uma superfície plana em relação aos eixos baricêntricos x_G e y_G como a **relação** entre o momento de inércia (I) relativo ao eixo que passa pelo centro de gravidade e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção transversal analisada.

As dimensões máximas, esquematicamente ilustradas na figura 2.80, são obtidas em função do centro de gravidade.

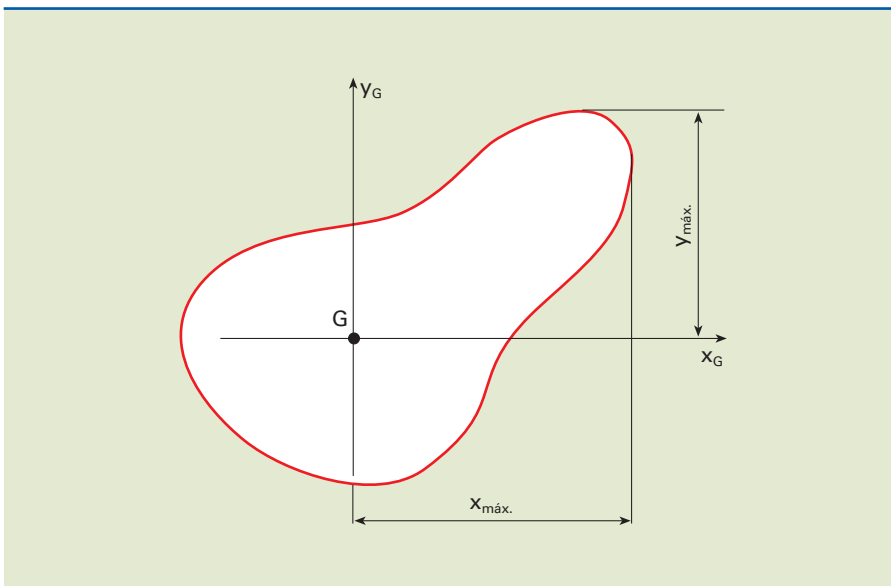


Figura 2.80

Determinação das dimensões máximas em relação ao centroide.

$$W_{x_G} = \frac{I_{x_G}}{y_{m\grave{a}x}}$$

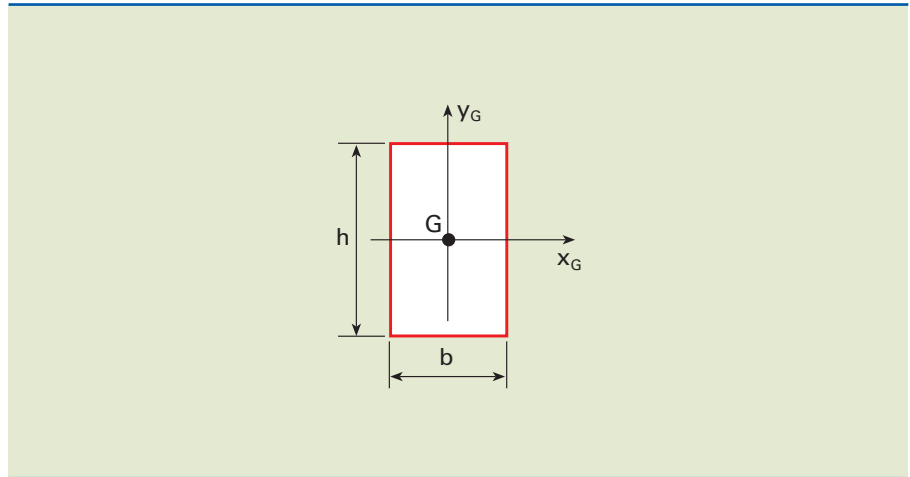
$$W_{y_G} = \frac{I_{y_G}}{x_{m\grave{a}x}}$$

Exemplo

Determinar os módulos de resistência da seção plana retangular, indicada na figura 2.81, em relação aos eixos baricêntricos paralelos aos lados.

Figura 2.81

Exemplo de cálculo do módulo de resistência.



Solução

Sabendo que o momento de inércia em relação ao eixo x_G é

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{e que o momento de inércia em relação ao eixo } y_G \text{ é}$$

$$I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}, \quad x_{m \perp x} = \frac{b}{2} \quad \text{e } y_{m \perp x} = \frac{h}{2}, \quad \text{temos:}$$

$$W_{x_G} = \frac{I_{x_G}}{y_{m \perp x}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_{y_G} = \frac{I_{y_G}}{x_{m \perp x}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}$$

$$\therefore W_{x_G} = \frac{bh^2}{6} \quad \text{e } W_{y_G} = \frac{hb^2}{6}$$

Translação de eixos (teorema de Steiner)

Quando o momento de inércia é conhecido para determinado eixo, é possível transportar esse momento a outro eixo desde que este seja paralelo. O teorema descrito é denominado **teorema do eixo paralelo** ou **teorema de Steiner**.

Uma seção transversal (geometria bidimensional) qualquer, como sugerido na figura 2.82, possui área total igual a S . Se o momento de inércia é conhecido

para o eixo x_G , podemos determinar seu momento de inércia em um eixo qualquer (x) paralelo cuja dimensão é igual a d .

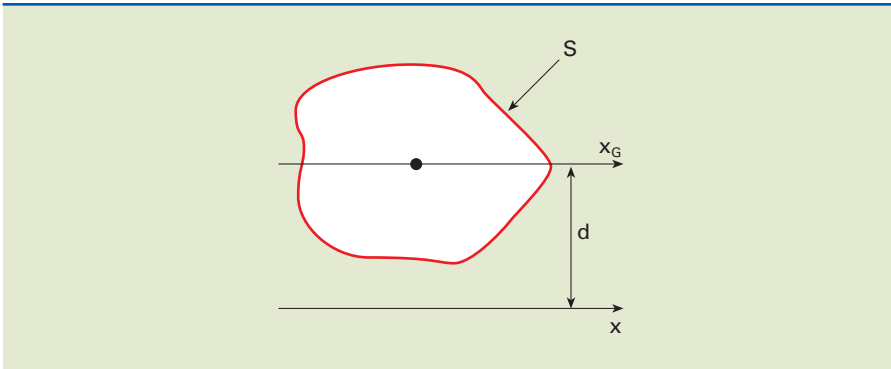


Figura 2.82

Representação esquemática do teorema de Steiner.

Dessa forma, obtemos a seguinte equação:

$$I_x = I_{x_G} + S \cdot d^2$$

em que: I_x = momento de inércia no eixo x .

Exemplo

Determinar o momento de inércia de uma seção retangular em relação a um eixo que passa pela base, como indicado na figura 2.83.

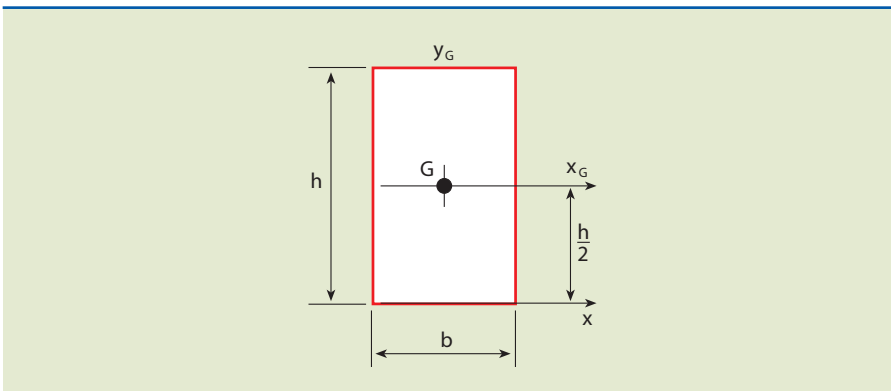


Figura 2.83

Exemplo de aplicação do teorema dos eixos paralelos.

Solução

Sabendo que $I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}$ e que $x \parallel x_G$, aplicando a fórmula, temos: $I_x = I_{x_G} + sd^2$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + b \cdot h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12} = \frac{4bh^3}{12} \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3}$$

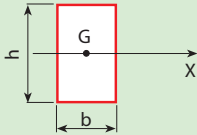
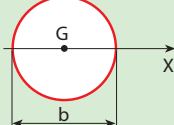
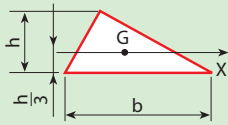
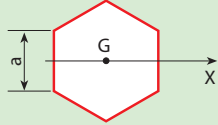
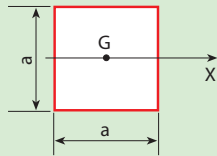
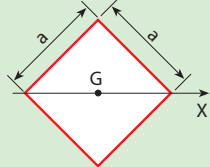
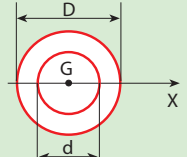
Momento de inércia e módulos de resistência

Como para o cálculo do momento de inércia exige-se conteúdo de matemática (cálculo diferencial e integral) ainda não adquirido pelos alunos do ensino médio, esta e as demais propriedades de figuras planas são oriundas de tabelas fornecidas em livros e manuais.

Tabela 2.3

Momento de inércia e módulo de resistência para geometrias planas.

Para algumas geometrias simples, são apresentados na tabela 2.3 o momento de inércia axial (I_x), momento polar de inércia (I_p), módulo de resistência (W_x) e módulo de resistência polar (W_p).

| Seções | Momento de inércia axial (I_x) | Momento polar de inércia (I_p) | Módulo de resistência (W_x) | Módulo de resistência polar (W_p) |
|---|------------------------------------|--|---|---|
|  | $I_x = \frac{bh^3}{12}$ | $I_x = \frac{bh(b^2 + h^2)}{12}$ | $W_x = \frac{bh^2}{6}$ | $W_p = \frac{b \cdot h^2}{3 + 1,8b/h}$ se, $h > b$ |
|  | $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$ | $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ | $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \cong 0,1d^3$ | $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2d^3$ |
|  | $I_x = \frac{bh^3}{36}$ | $I_p = \frac{3b^4}{48}$ p/ Δ equilátero | $W_x = \frac{bh^2}{24}$ | $W_p = 0,05 \cdot b^3$ p/ Δ equilátero |
|  | $I_x = 0,5413 \cdot a^4$ | $I_p = 1,0825 \cdot a^4$ | $W_x = 0,5413 \cdot a^3$ | $W_p = 0,917 \cdot a^3$ |
|  | $I_x = \frac{a^4}{12}$ | $I_p = \frac{a^4}{6}$ | $W_x = \frac{a^3}{6}$ | $W_p = 0,208 \cdot a^3$ |
|  | $I_x = \frac{a^4}{12}$ | $I_p = \frac{a^4}{6}$ | $W_x = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ | $W_p = 0,208 \cdot a^3$ |
|  | $I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ | $I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$ | $W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$ | $W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$ |

Exemplo

Determinar o valor do diâmetro de uma seção circular que tem o mesmo valor do momento de inércia de uma seção retangular de 2 cm × 5 cm, cujo eixo passa pelo centro de gravidade paralelo a sua base menor, conforme indicado na figura 2.84.

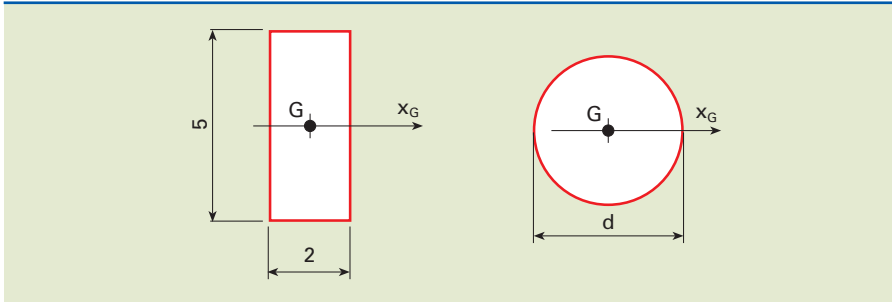


Figura 2.84

Exemplo de momento de inércia.

Solução

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 5^3}{12} = 20,8 \text{ cm}^4$$

O momento de inércia da seção circular em relação a um eixo que passa pelo centro de gravidade é:

$$I_{x_G} = \frac{\pi d^4}{64}. \text{ Dessa forma: } \frac{\pi d^4}{64} = 20,8 \Rightarrow d^4 = \frac{64 \cdot 20,8}{\pi}$$

$$\therefore d \cong 4,5 \text{ cm}$$

Exemplo geral

Calcular o momento de inércia da figura 2.85 em relação a um eixo que passa pelo centro de gravidade paralelo à base.

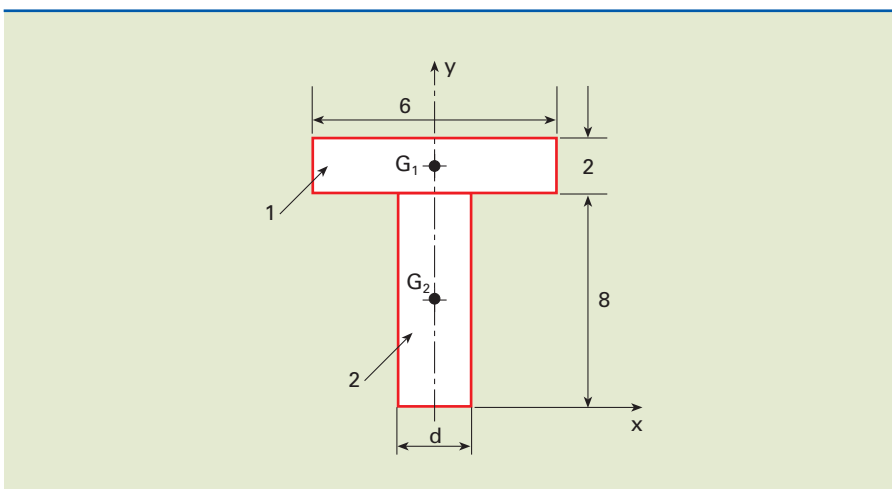


Figura 2.85

Exemplo de caso geral.



Solução

Como a figura tem um eixo de simetria, definimos o eixo y coincidindo com o eixo de simetria.

Dividimos a geometria em duas figuras simples, 1 e 2, e determinamos G_1 e G_2 .

Em seguida, determinamos o centro de gravidade

$$x_G = \frac{\sum S_i \cdot x_{G_i}}{S} = 0, \text{ pelo fato de esse ponto encontrar-se no eixo de simetria.}$$

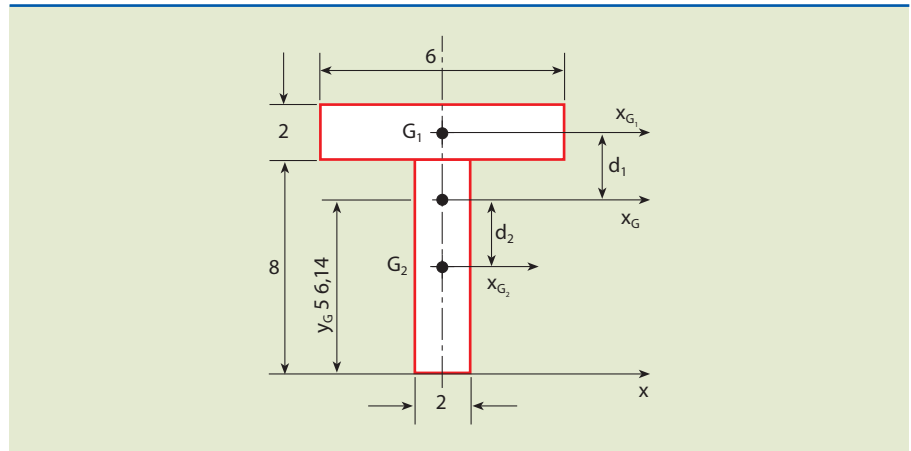
$$y_G = \frac{\sum S_i \cdot y_{G_i}}{S} = \frac{S_1 \cdot y_{G_1} + S_2 \cdot y_{G_2}}{S_1 + S_2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 4}{6 \cdot 2 + 2 \cdot 8}$$

$$y_G = \frac{108 + 64}{28} = \frac{172}{28} \Rightarrow y_G = 6,14 \text{ cm}$$

Obtidos os valores das coordenadas $x_G = 0$ e $y_G = 6,14$ cm, localizamos o ponto G na geometria, conforme indicado na figura 2.86.

Figura 2.86

Indicação do centro de gravidade para a geometria proposta.



$$I_{x_G}^S = I_{x_G}^{S_1} + I_{x_G}^{S_2}$$

$$I_{x_G} = \left(I_{x_{G_1}}^{S_1} + S_1 \cdot d_1^2 \right) + \left(I_{x_{G_2}}^{S_2} + S_2 \cdot d_2^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{x_G} = \left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 2 \cdot 2,86^2 \right) + \left(\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot 2,14^2 \right)$$

$$I_{x_G} = (4 + 98,2) + (85,3 + 73,3) \Rightarrow I_{x_G} = 260,8 \text{ cm}^4$$